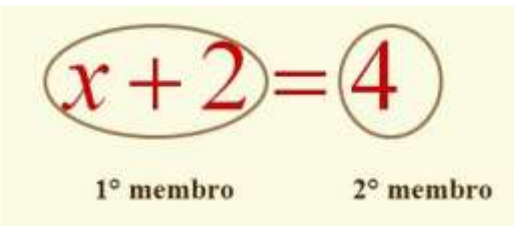
Equazioni di primo grado ad una incognita

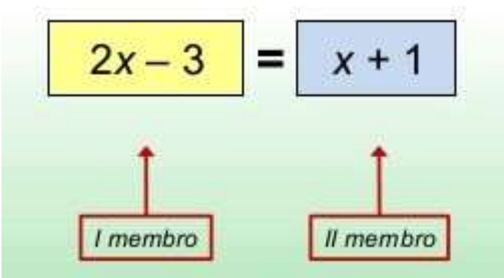
Un'equazione è un'uguaglianza tra due espressioni algebriche (tra due polinomi), nelle quali è presente **un'incognita.**

Risolvere un'equazioni significa trovare, quando esiste, il valore dell'incognita che rende vera l'uguaglianza: tale valore si chiama **soluzione dell'equazione.**

SOLUZIONE DETERMINATA La soluzione esiste e può essere anche 0 In simboli: ∃ sol	$\boldsymbol{ax = b}$ Con $a \neq 0$ $\quad x = \frac{b}{a}$ <u>*Esempio*</u>: $2x = 3$ $\quad \boldsymbol{x = \frac{3}{2}}$
SOLUZIONE INDETERMINATA Le soluzioni sono infinite POSSO SOSTITUIRE QUALSIASI VALORE ALLA x PER OTTENERE UN'UGUAGLIANZA TRA I DUE TERMINI, QUINDI NON POSSO DETERMINARE IL VALORE ESATTO	$\boldsymbol{ax = b}$ Con $a = 0$ e $b = 0$ <u>*Esempio*</u>: $\boldsymbol{0x = 0}$
SOLUZIONE IMPOSSIBILE La soluzione NON ESISTE - *in simbli ∄ sol* QUALE VALORE MOLTIPLICATO PER 0 DA COME RISULTATO UN NUMERO (ESEMPIO 3)? NESSUNO, PER QUESTO LA SOLUZIONE E' IMPOSSIBILE	$\boldsymbol{ax = b}$ Con $a = 0$ e $b \neq 0$ <u>*Esempio*</u>: $\boldsymbol{0x = 3}$

In un'equazione si distinguono il **primo membro** e il **secondo membro**, separati dal segno di uguaglianza.





- per convenzione l'incognita si indica con *x*, ma può essere una lettera qualsiasi
- i termini che non presentano l'incognita si chiamano termini noti
- nell'espressione *2x*, 2 è il coefficiente dell'incognita
- l'espressione *3y* significa 3 per *y*
- *le equazioni di primo grado ad una incognita ammettono una sola soluzione (se esiste)*

Due equazioni sono **equivalenti** se hanno la stessa soluzione.

$3x = 21$ e $2x + 9 = 4x - 5$ $x = 7$

Primo principio di equivalenza

Si ottiene una equazione *equivalente* a quella data *sommando* o *sottraendo* la stessa quantità ai membri dell'equazione.

$x + 5 = 9$

$x + 5 - 5 = 9 - 5$

$x = 4$

Secondo principio di equivalenza

Si ottiene un'equazione equivalente a quella data, *moltiplicando* o *dividendo* per lo stesso numero (diverso da 0) entrambi i membri dell'equazione.

$3x - 6 = 9$ soluzione $x = 5$

$(3x - 6) \cdot 2 = 9 \cdot 2$	$(3x - 6) : 3 = 9 : 3$
$6x - 12 = 18$	$x - 2 = 3$
soluzione $x = 5$	soluzione $x = 5$

Regola del trasporto

Un'equazione si trasforma in un'altra equivalente, *trasportando* un termine da un membro all'altro e *cambiandogli il segno*.

$x - 8 = 2$

$x = 2 + 8$ $x = 10$

Equazioni a coefficienti interi (in Z): procedimento risolutivo

Equazioni senza parentesi

$$2x+28=40+5x-6x$$

1. *Trasporto tutti i termini con l'incognita in un membro e tutti i termini noti nell'altro membro:* ***quando traporto un termine cambio il segno; se un termine rimane "fermo" il segno non si cambia***

$$2x-5x+6x=40-28$$

2. *Sommo algebricamente i termini simili*

$$3x=12$$

Quando si arriva qui, l'equazione si dice che è IN FORMA NORMALE

3. *Divido entrambi i membri per il coefficiente dell'incognita (in questo caso la x)*

$$\frac{3x}{3}=\frac{12}{3}$$ *semplifico e ottengo la soluzione* $$x=4$$

Equazioni con parentesi

$$4(-3-x)-14(x+2)+15=-15-8x$$

1. *Elimino le parentesi applicando* ***la proprietà distributiva: il termine davanti alla parentesi viene MOLTIPLICATO PER OGNI TERMINE DENTRO LA PARENTESI. In questo passaggio fare attenzione ai segni***

$$-12-4x-14x-28+15=-15-8x$$

Ho moltiplicato 4 per -3 e poi 4 per -x; nella seconda parentesi ho moltiplicato -14 per x e -14 per 2

2. *Una volta eliminate le parentesi procedo come prima*

Equazioni con frazioni o a coefficienti frazionari – 1° caso

$$\frac{1}{6}\cdot(4+x)=1-\frac{1}{9}\cdot(1-2x)$$

1. *Per prima cosa elimino le parentesi con la proprietà distributiva*

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}x=1-\frac{1}{9}+\frac{2}{9}x$$

2. *Faccio il minimo comune multiplo tra TUTTI i denominatori e procedo con la somma tra frazioni (18: 3 = 6; 6x2=12….e così via…)*

$$\frac{12+3x}{18}=\frac{18-2+4x}{18}$$

3. *Applico il principio di equivalenza e moltiplico ENTRAMBI I MEMBRI PER IL DENOMINATORE COMUNE*

$$18\times\frac{12+3x}{18}=\frac{18-2+4x}{18}\times 18$$

4. *Semplifico ed **ottengo un'equazione equivalente a coefficienti interi**…e posso procedere*

$$12+3x=18-2+4x$$

Equazioni con frazioni o a coefficienti frazionari – 2° caso

$$\frac{3x-1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{2(2x+3)}{5}-\frac{x+3}{2}$$

vedi schema specifico

VERIFICA DI UNA EQUAZIONE

Verificare un'equazione significa vedere se la soluzione rende vera l'uguaglianza.

Come si procede per verificare un'equazione?

SOSTITUIRE LA SOLUZIONE NEL TESTO DELL'EQUAZIONE:

1. Si ottengono due espressioni, a destra e sinistra dell'uguale.
2. Le espressioni vanno risolte SEPARATAMENTE, senza trasporto
3. Se alla fine si ottiene un'identità, (7=7 oppure 0=0 oppure -1/2 = -1/2....), allora la soluzione è corretta

ESEMPIO 1

$10(x+2)+20=6(x-2)+22-x$ **SOLUZIONE** ***x = - 6***

Sostituisco -6 al posto della x

$$10(-6+2)+20=6(-6-2)+22-(-6)$$

Faccio i conti opportuni….Ricordo che per es 10 davanti alla parentesi senza segno significa che il 10 va moltiplicato per il contenuto della parentesi

$10(-4)+20=6(-8)+22+6$

$-40+20=-48+22+6$

$-20=-20$

La soluzione è corretta!

ESEMPIO 2

$$8x-x-4=\frac{3}{4}x$$

Soluzione 16/25

$$8\times\frac{16}{25}-\frac{16}{25}-4=\frac{3}{4}\times\frac{16}{25}$$

$$\frac{128}{25}-\frac{16}{25}-4=\frac{12}{25}$$

$$\frac{128-16-100}{25}=\frac{12}{25} \qquad \frac{12}{25}=\frac{12}{25}$$

La soluzione è corretta!

equazione

A COEFFICIENTI INTERI

i coefficienti dell'incognita e i termini noti sono numeri interi positivi o negativi

$$5\,(x+2)-3x=2\,(x+7)$$

A COEFFICIENTI FRAZIONARI

<u>almeno un</u> coefficiente dell'incognita e/o un termine noto è una frazione positiva o negativa

$$\frac{3x}{8}+\frac{1}{6}=1$$

$$\frac{x-2}{3}+\frac{x-3}{2}=\frac{x-5}{6}+2$$

PARAMETRICA

oltre l'incognita è presente una lettera (il parametro) *che può variare in base a certe condizioni*

- Data l'equazione
$5\,(x-1)=ax+3$
calcola il valore di a per il quale essa risulta impossibile.
- Data l'equazione
$3\,(x+1)=ax+3$
calcola il valore di a per il quale essa risulta indeterminata.
- Data l'equazione
$4\,(x-1)-1=a-x$
calcola il valore di a per il quale la soluzione è $x=2$.

FRATTA

ci sono coefficienti frazionari e L'INCOGNITA E' ***ANCHE*** AL DENOMINATORE

$$2x+\frac{3}{2x+1}=11-x$$

Mappa

EQUAZIONI

$2x + 3 = 5 \rightarrow x = 1$ — **soluzione:** $2 \cdot 1 + 3 = 5$

incognita

CLASSIFICAZIONE

- **Intera**
  $\frac{1}{3}x + 5 = 2x$
- **Fratta**
  $\frac{2}{x-1} = x$
  incognita al denominatore
  condizioni di esistenza: denominatore $\neq 0$
  $x - 1 \neq 0 \rightarrow$ C.E.: $x \neq 1$

- **Numerica**
  $\frac{2}{3}x = 2x - 1$ — non contiene altre lettere oltre l'incognita
- **Letterale**
  $4x - 5a = x$
  parametro: lettera che non è l'incognita

- **Determinata**
  $x^2 - 3 = 1 \longrightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$
  numero finito di soluzioni
- **Indeterminata**
  $5x = 2x + 3x$ — infinite soluzioni
- **Impossibile**
  $x^2 = -1$ — non ha soluzioni

PRINCIPI DI EQUIVALENZA

- Due equazioni nelle stesse incognite sono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni.
- **Primo principio di equivalenza**
  $2 - 3x = 1 + 5x \rightarrow 2 - 3x - 5x = 1 + 5x - 5x$
  primo principio
  $7x + 3 = x \rightarrow 7x = x - 3$
  regola del trasporto
  $A + C = B \rightarrow A = B - C$
  $x + 2 = 1 - 5x + 2 \rightarrow x = 1 - 5x$
  regola di cancellazione
  $A + \cancel{C} = B + \cancel{C} \rightarrow A = B$
- **Secondo principio di equivalenza**
  $\frac{3}{2}x + \frac{9}{2} = 6 \xrightarrow{\cdot 2} 3x + 9 = 12 \xrightarrow{:3} x + 3 = 4$
  secondo principio
  $-2x + 5 = -4 \rightarrow 2x - 5 = +4$
  regola del cambiamento di segno
  $A = B \rightarrow -A = -B$

EQUAZIONI NUMERICHE LINEARI

Sono riconducibili alla forma:
$ax = b$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

- Equazione **determinata**:
  $a \neq 0, ax = b \rightarrow x = \frac{b}{a}$.

  $2x + 4 = -x - 2$
  $3x = -6$
  $x = -2$

- Equazione **indeterminata**:
  $a = 0$ e $b = 0$,
  $ax = b \rightarrow 0x = 0$.

  $2x \cancel{-1} - x = x \cancel{-1}$
  $2x - x - x = 0$
  $0x = 0$

- Equazione **impossibile**:
  $a = 0$ e $b \neq 0$,
  $ax = b \rightarrow 0x = b$.

  $4x + 2 - 2x = -1 + 2x$
  $4x - 2x - 2x = -1 - 2$
  $0x = -3$

TEORIA

Risoluzione di un'equazione di primo grado con frazioni – 2° caso

$$\frac{3x-1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{2(2x+3)}{5}-\frac{x+3}{2}$$

PRIMO ESEMPIO

1. Si eliminano le parentesi se esistono

$$\frac{3x-1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{4x+6}{5}-\frac{x+3}{2}$$

2. Si trova il minimo comune multiplo tra TUTTI I DENOMINATORI

$$\frac{\qquad\qquad}{20}=\frac{\qquad\qquad}{20}$$

3. Si fanno i conti con le frazioni per eliminare i denominatori.
ATTENZIONE AL SEGNO MENO DAVANTI ALLA LINEA DI FRAZIONE: fa cambiare tutti i segni della frazione stessa; per evitare errori **è consigliato usare le parentesi, che poi vengono eliminate nel passaggio successivo**

$$20\times\frac{15x-5-10}{20}=\frac{16x+24-(10x+30)}{20}\times 20$$

$$15x-5-10=16x+24-10x-30$$

4. Si procede con i conti per trovare la soluzione

$$\frac{4+5x}{2} = 2x+1 - \left[\frac{2+11x}{8} - (2x+1)\right]$$

SECONDO ESEMPIO

Il procedimento è lo stesso, ma in questo caso prima bisogna eliminare le parentesi: fare attenzione al segno meno davanti alla parentesi quadra....

$$\frac{4+5x}{2} = 2x+1 - \frac{2+11x}{8} + 2x+1$$

Poi si procede come nel primo esempio

$$\frac{16+20x}{8} = \frac{16x+8-(2+11x)+16x+8}{8}$$

Come già indicato nel primo esempio, quando c'è un segno meno davanti ad una linea di frazione è consigliato usare le parentesi come indicato

A questo punto si eliminano i denominatori e l'ultima parentesi

$$8 \times \frac{16+20x}{8} = \frac{16x+8-2-11x+16x+8}{8} \times 8$$

Si procede con i conti fino alla soluzione.....