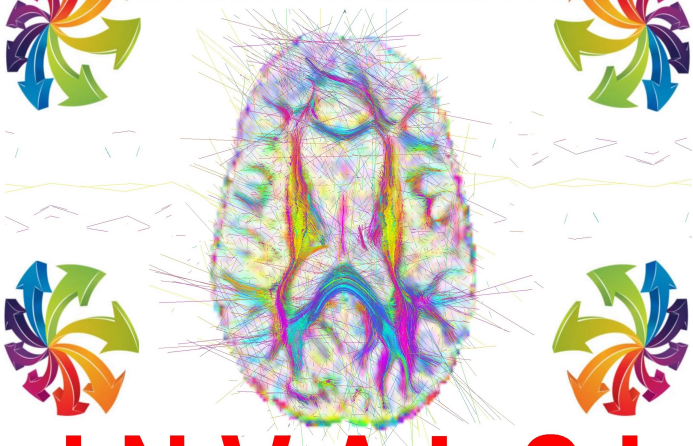
RISORSE DIDATTICHE.

【ResearchGate Project】 *By ... 0000-0001-5086-7401 & lnkd.in/erZ48tm*

ORIENTA*MENTI*



INVALSI

Numeri Relativi – parte 01

QUANDO LA TEMPERATURA SCENDE SOTTO LO ZERO… I NUMERI INTERI RELATIVI

“*Il relitto è stato trovato a 40 metri sotto il livello del mare*“

“*La temperatura è scesa a 5 gradi sotto lo zero*“

“*Il mio conto in banca è andato in rosso*“

Si possono fare numerosi altri esempi in cui si può notare che risulta necessario introdurre nuovi numeri per studiare situazioni del tipo:

sotto/sopra, debito/credito , prima/dopo.

Consideriamo per esempio la seguente situazione:

In un estratto conto bancario, nei movimenti contabili compaiono 4 colonne: Data, Valuta, Importo euro, Descrizione dell’operazione:

Data	Valuta	Importo Euro	Operazione
		130,00-	Assegno
		1360,00+	Stipendio
		69,00-	Prelev. Bancomat
		882,00-	Assegno
		463,00+	Bonifico

Se osserviamo la terza colonna vediamo che alcuni numeri sono seguiti dal segno + , altri dal segno - .

Leggendo la descrizione dell' operazione relativa ad un numero con il segno + si può notare che questa è stipendio oppure bonifico; il numero riportato è un accredito che viene fatto sul conto, cioè una quantità da aggiungere al conto. Se invece leggiamo la descrizione dell' operazione relativa ad un numero con il segno - , puoi notare che abbiamo un assegno o un prelevamento bancomat, cioè il numero riportato è un addebito che viene fatto sul conto, cioè una quantità da sottrarre al conto.

Può accadere che "il conto vada in rosso", cioè che sia stato prelevato più denaro di quello disponibile.

Come determinare di quanto siamo andati "in rosso"?

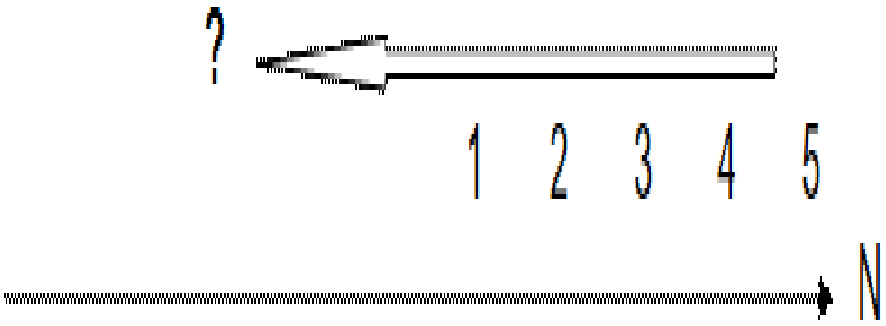
Oppure…

Un termometro segna una temperatura di 4 gradi sopra lo zero: 4°C. Poi la temperatura scende di 6°C.

Quale sarà la nuova temperatura indicata dal termometro?

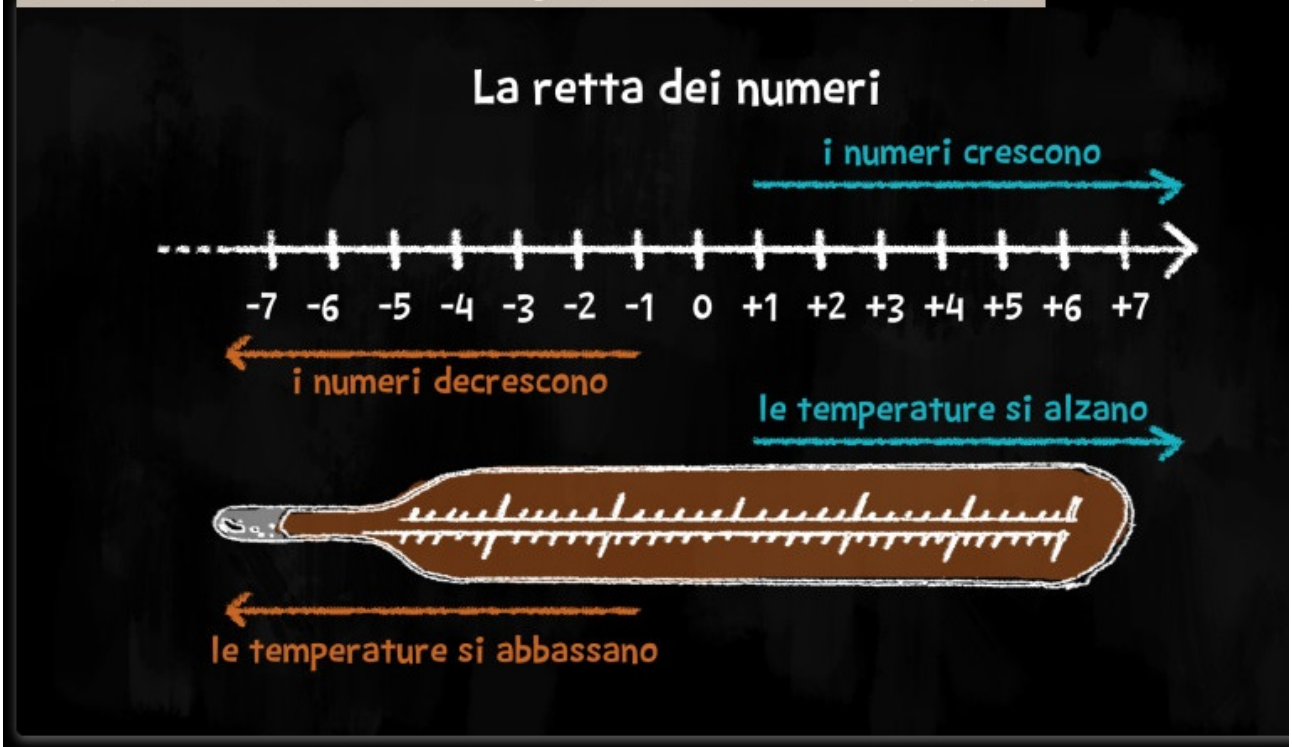
La situazione in essa rappresentata si può tradurre con l' operazione 4 - 6 e il problema diventa quello di associare a tale operazione un risultato.

Nell' insieme N dei numeri naturali questa operazione non è possibile, come puoi vedere nella figura:



La rappresentazione dei numeri relativi

https://redooc.com/it/medie/matematica-algebra/numeri-relativi/introduzione#postAppunti



A che cosa servono questi numeri relativi? Non bastano i numeri naturali, le frazioni e le radici?

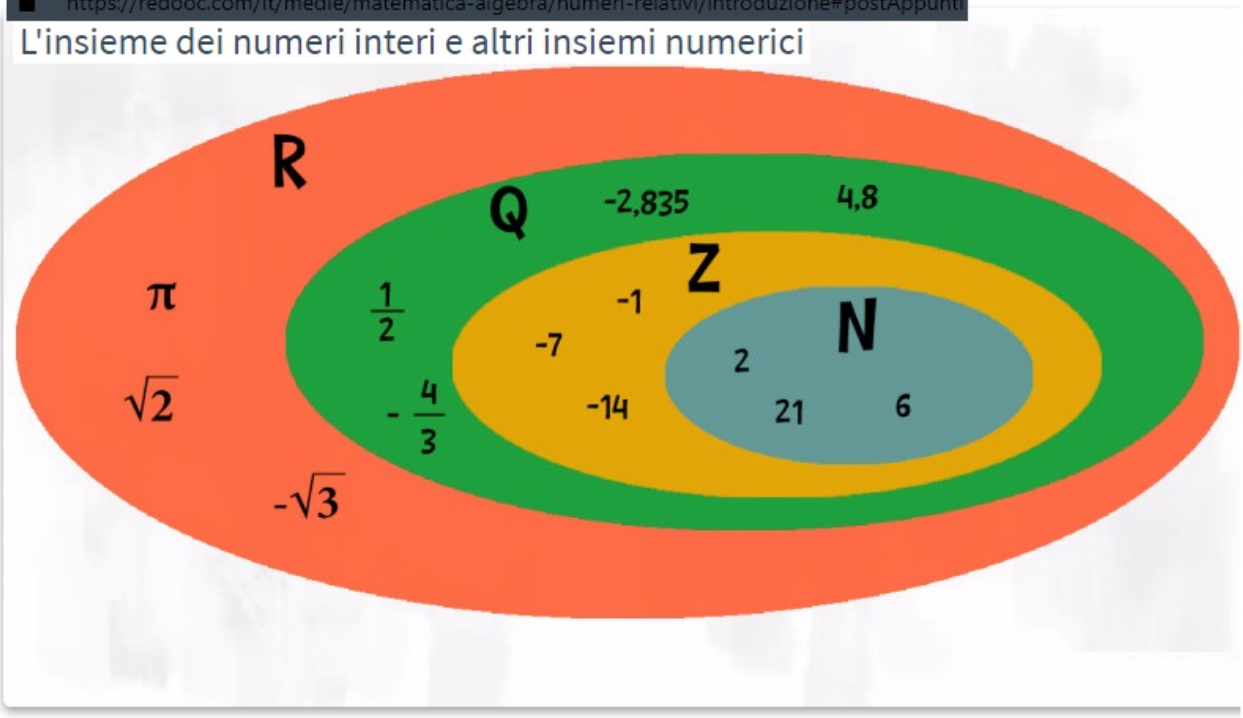
Abbiamo visto che **tra numeri naturali non è sempre possibile fare la sottrazione**. Per questo motivo abbiamo introdotto **l'insieme dei numeri interi** $\mathbb{Z}$: in questo insieme **possiamo svolgere tutte le addizioni e tutte le sottrazioni.**

Per studiare i numeri interi ci aiutiamo con la **retta numerica**: lo 0 è come uno specchio. **Alla sua destra ci sono i numeri positivi che crescono sempre di più, alla sua sinistra i numeri** specchiandosi **diventano negativi e decrescono sempre di più.**

Esempio: qual è il numero più grande tra -5 e -12?
Non farti ingannare! I numeri con il segno meno funzionano al contrario: possiamo dire che "più sono grandi, più sono piccoli". Quindi $-5 > -12$.

Non ne sei convinto? Prova a immaginare se fa più freddo con $-5°\mathrm{C}$ o con $-12°\mathrm{C}$... ;-)

https://redooc.com/it/medie/matematica-algebra/numeri-relativi/introduzione#postAppunti



L'insieme dei numeri relativi, o **numeri interi**, è indicato con la lettera $\mathbb{Z}$.
Contiene tutti i numeri interi, positivi e negativi. **Quindi l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ è un suo sottoinsieme.**

Quali altri numeri conosci?
Abbiamo studiato anche **le frazioni**, cioè **i numeri razionali**: **sono i numeri dell'insieme $\mathbb{Q}$.**
I numeri razionali possono essere positivi e negativi, quindi possiamo scrivere che $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Ci sono però altri numeri che non si possono scrivere sotto forma di frazione, come π oppure $\sqrt{2}$: **sono i numeri irrazionali**! Fanno parte dell'**insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$**.
Anche **i numeri irrazionali possono essere positivi o negativi**!

Quindi gli insiemi numerici sono

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

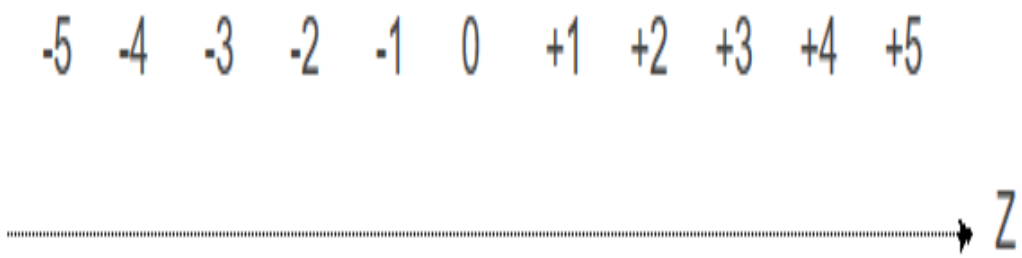
In generale, ai termini dell' operazione a – b = c diamo sulla retta numerica il seguente significato:

- a indica il punto di partenza
- il segno – indica uno spostamento in senso opposto all' orientamento della retta (quindi da destra verso sinistra)
- b indica le unità di tale spostamento
- c rappresenta il punto di arrivo (risultato).

Quindi si può facilmente capire che per poter risolvere l' operazione data bisogna assegnare un valore anche ai punti della retta che si trovano a sinistra dello zero.

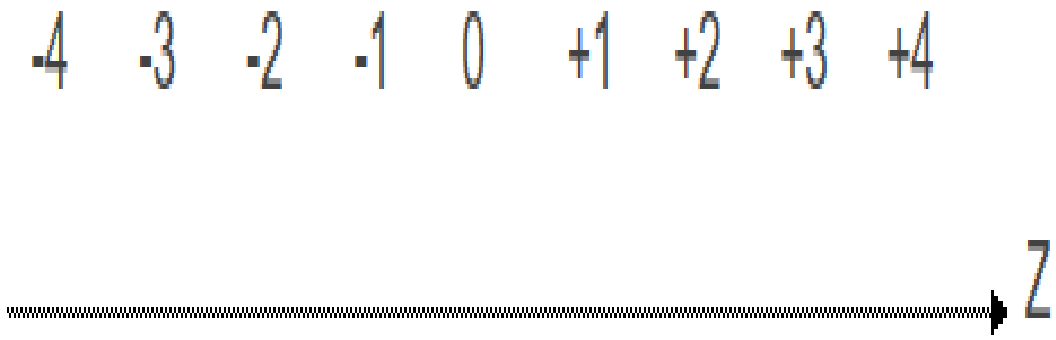
Torniamo ora alla retta orientata:

fissata l' unità di misura, l' origine e il verso, si può osservare che ad ogni numero naturale si possono associare due punti rispettivamente uno a destra e uno a sinistra dell' origine, che indichiamo con il numero 0, raggiungibili con lo stesso numero di passi ciascuno di ampiezza uguale all' unità di misura. Per poterli distinguere stabiliamo la seguente regola: si associa il segno + (positivo) ai numeri corrispondenti a punti che si trovano a destra dell' origine e il segno – (negativo) a quelli corrispondenti a punti che si trovano a sinistra dell'origine.



In questo modo abbiamo ottenuto un nuovo insieme numerico, che indicheremo con Z (dall' iniziale della parola tedesca "Zahl" che significa numero) e che chiameremo insieme dei numeri interi relativi.

Se ora riprendiamo il problema posto siamo in grado di trovare la temperatura cercata facendo sei passi (unità) verso sinistra a partire da +4.



Come puoi vedere la temperatura cercata è dunque –2.

Ogni elemento di Z, cioè ogni numero intero relativo si compone così di due parti:

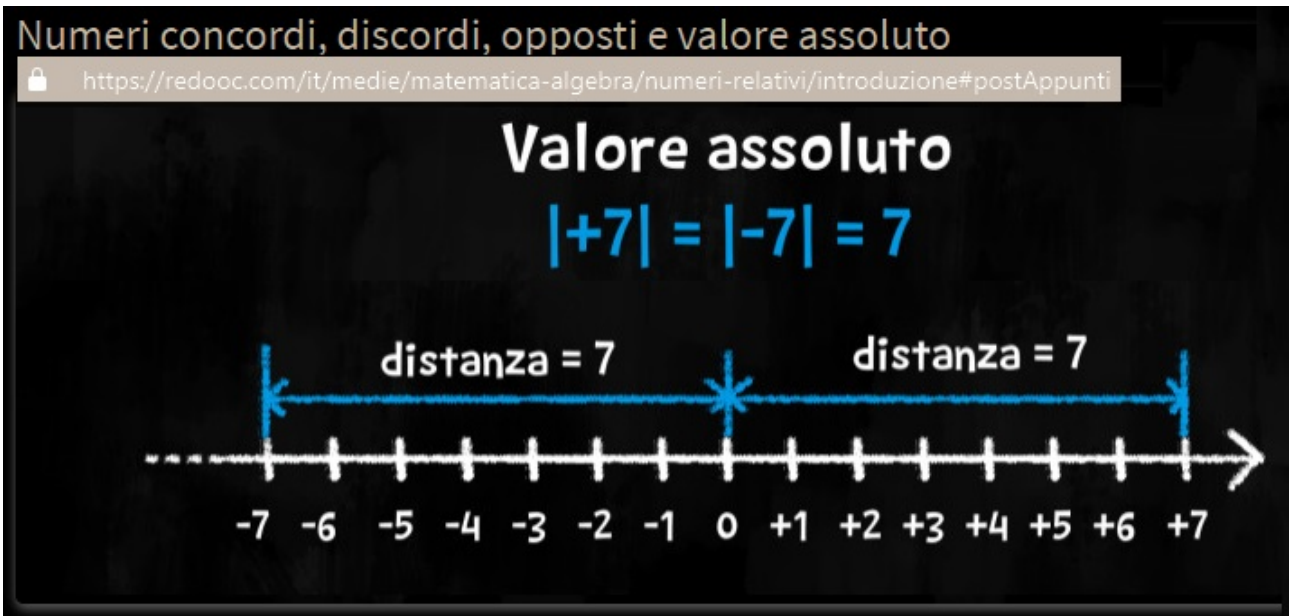
- il segno (+ oppure -)
- il modulo o valore assoluto;

osserva in merito la tabella successiva:

Numero intero relativo	Segno	Modulo
+ 2	+	2
- 1	-	1
+ 5	+	5
- 7	-	7
- 5	-	5

Numeri concordi, discordi, opposti e valore assoluto

https://redooc.com/it/medie/matematica-algebra/numeri-relativi/introduzione#postAppunti



Due **numeri che hanno lo stesso segno** vanno d'accordo:
sono concordi!
Due **numeri che hanno segno diverso** non vanno d'accordo:
sono discordi!

Esempi:
-12 e -4 sono concordi, hanno entrambi segno $-$.
-1 e $+6$ sono discordi, hanno segno diverso!

Mettiamoci sullo 0 della retta dei numeri, facciamo 8 salti verso destra e raggiungiamo il numero $+8$. Se facciamo 8 salti verso sinistra torniamo esattamente al nostro punto di partenza, lo 0.
Possiamo rappresentare l'operazione appena fatta con il linguaggio matematico scrivendo $+8 + (-8) = 0$.
$+8$ e -8 **sono due numeri discordi la cui somma fa** 0:
allora **sono opposti**!

Se rappresentiamo i numeri $+8$ e -8 sulla retta, notiamo subito che **sono simmetrici rispetto allo** 0 e che quindi la loro distanza dallo 0 è la stessa: 8.
Questa distanza si chiama anche **valore assoluto o modulo**.
Il valore assoluto di $+8$ e il valore assoluto di -8 sono uguali e valgono 8.
In simboli matematici scriviamo che:
$|+8| = |-8| = 8$

E **il valore assoluto di** 0? È 0!
$|0| = 0$

ATTENZIONE

Lo zero non è né positivo né negativo: è l'elemento separatore tra i numeri positivi e quelli negativi.

Per convenzione il segno + dei numeri positivi può venire sottinteso , cioè +2 = 2 , +5 = 5 , quindi i numeri positivi coincidono col loro modulo, al contrario il segno – non può mai essere sottinteso.

ALCUNE DEFINIZIONI…

Due numeri interi relativi si dicono

- concordi se hanno lo stesso segno (per es. +3 e+5 , -2 e –8)
- discordi se hanno segno diverso (-2 e+3 , +8 e –1)
- opposti quando sono discordi e hanno lo stesso modulo (per es. +4 e -4)

Un attimo di attenzione alle parole usate

Il termine **relativo** ha, nel linguaggio naturale, il significato di qualcosa che è in relazione con altra cosa, di qualcosa che può assumere un valore diverso a seconda del punto di vista di chi la consideri; in matematica, si dice numero relativo un qualsiasi numero intero positivo o negativo; il segno è in relazione alla posizione del numero rispetto allo zero sulla retta orientata.

Il termine **concorde**, nel linguaggio naturale significa che concorda, che è in accordo; in matematica numeri concordi sono numeri che hanno lo stesso segno.

Il termine **discorde**, nel linguaggio naturale significa che non è in accordo, diverso; in matematica numeri discordi sono numeri di segno opposto.

Come si possono confrontare due o più numeri interi relativi cioè stabilire se sono uguali o, se no,quale è più grande?

Confronto tra numeri relativi

Vale la semplice regola:

Tra due numeri disposti sulla retta orientata il maggiore è quello che si trova più a destra.

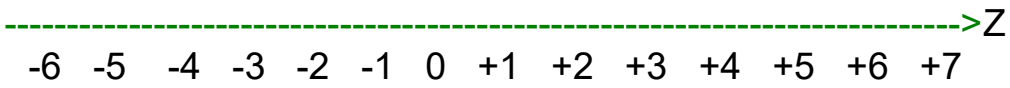
Si possono dedurre altre semplici regole:

- *Ogni numero positivo è maggiore di qualsiasi numero negativo.*
- *Lo zero è maggiore di qualsiasi numero negativo e minore di qualsiasi numero positivo.*

In base a queste semplici regole possiamo ora provare…

a confrontare i due numeri positivi: +4 > +2 .
e poi a confrontare invece i due numeri negativi opposti ai precedenti:
-4 < -2.

Come si può notare l' ordinamento tra i numeri positivi (1° caso) è l'opposto dell' ordinamento tra i numeri negativi (2° caso)



Come possiamo vedere dai numeri riportati sulla retta orientata:
+2 > -5,
0 < +1,
0 > -3,
+4 > +1.

Passiamo ora alle **operazioni con i numeri interi relativi**.

Per cominciare osserviamo che:

nell' insieme Z le operazioni interne, cioè quelle che danno come risultato ancora un numero intero relativo, sono

- **l' addizione**
- **la sottrazione**
- **la moltiplicazione**

Osserva che l' aver ampliato l' ambiente numerico da N a Z ci permette di individuare il risultato di ogni sottrazione fra numeri interi, mentre non è ancora possibile scrivere il risultato di tutte le divisioni fra numeri interi relativi.

Questo sito fa uso di cookie. Proseguendo nella navigazione si accetta l'uso di cookie. INFORMAZIONI CHIUDI

INSIEME DEI NUMERI INTERI RELATIVI

Nell'insieme N dei numeri naturali non è possibile eseguire una sottrazione del minuendo più grande del sottraendo. Si può introdurre a questo inconveniente ampliando la classe dei numeri naturali, introducendo numeri negativi.

In questo modo può essere costruito l'insieme Z dei numeri interi relativi che include anche i numeri negativi e che possiamo indicare:

$$Z=\{\ldots,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,\ldots\}$$

Un semplice esempio dell'uso dei numeri relativi si ha nella misurazione della temperatura in gradi Celsius (gradi centigradi) che è basata sulla scelta arbitraria di due temperature di riferimento: la temperatura del ghiaccio fondente. Noi segniamo zero per la prossima temperatura di 0 °C ma avremmo potuto scegliere un altro numero, ad esempio 100 o anche un numero negativo come -75 °C sul secondo caso non 0 °C.

Anche quando si misura il tempo, a partire da un dato istante (nuovo istante) si procede a ritroso se ci si deve riferire ad istanti precedenti oppure a quelli successivi, dove all'istante iniziale è da corrispondere lo zero e alla misura dell'intervallo di tempo che intercorre tra l'istante iniziale e quello considerato si dà il segno + o il segno - secondo che l'istante considerato segua o preceda l'istante iniziale.

Nelle operazioni di cassa occorre distinguere se i diversi movimenti di capitale sono delle riscossioni o dei pagamenti e in questo modo possono essere indicati positivi (+valori) o negativi (-valori).

Si conclude che i numeri ai quali si premette il segno + quasi il segno - possono essere chiamati numeri relativi, in particolare, i numeri preceduti dal segno + si dicono numeri positivi, quelli preceduti dal segno - si dicono numeri negativi.

I numeri positivi, i numeri negativi e lo zero, formano l'insieme dei numeri relativi.

- Il valore assoluto, o modulo, di un numero relativo è il numero senza privato del segno.

Il valore assoluto di + 3 è 3, il valore assoluto di -5 è 5 e si scrive: $|+3|=3$ e $|-5|=5$

Quindi ogni numero relativo possiede una doppia caratteristica: l'assoluto, ed il segno.

Due numeri relativi che hanno lo stesso segno si dicono concordi; due numeri relativi che hanno segno diverso si dicono discordi.

Due numeri relativi che hanno lo stesso valore assoluto e segno contrario si dicono opposti oppure contrari.

Il numero zero è l'opposto di se stesso.

- Due numeri relativi sono uguali, se e se hanno lo stesso segno e lo stesso modulo.

Il confronto tra due numeri relativi può essere fatto tramite presente a loro rappresentazione geometrica sulla semiretta dei numeri relativi, dove due numeri stessi sono ampliare per numeri relativi interi è diventata una retta numerica.

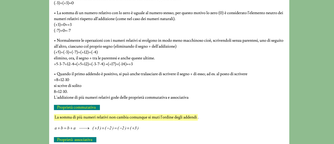
Se si vogliono confrontare due numeri relativi a e b, possiamo dire che a è minore di b (scrivendo $a<b$) se il punto sulla retta numerica associato ad a si trova a sinistra della stessa punto associato al numero b.

Ogni numero positivo è maggiore di qualunque numero negativo. $+2>-1$ e anche $+1>2$.

Di due numeri positivi è maggiore quello che ha il valore assoluto maggiore. $+10>+7$ anche $+7>+1$.

Di due numeri negativi è maggiore quello che ha valore assoluto minore. $-3>-5$ anche $-5>-1$.

Lo zero è minore di ogni numero positivo e maggiore di ogni numero negativo.



L'insieme dei numeri relativi Z, comprende ed include al suo interno l'insieme dei numeri naturali N.

L'insieme N, è dunque, un sottoinsieme di Z in senso stretto (non coincide con Z) e matematici indicano questa condizione con la scrittura $N \subset Z$.

ESPRESSIONE CON Z...

L'addizione con i numeri relativi si indica ponendo il segno + tra i numeri relativi chiusi dentro parentesi, cioecano con il proprio segno.

La somma di due numeri relativi concordi è il numero relativo che ha lo stesso segno degli addendi e per modulo la somma dei loro moduli.

$(+4)+(+8)=+14$
$(-5)+(-3)=-8$

La somma di due numeri relativi discordi è il numero relativo che ha il segno dell'addendo con modulo maggiore e per modulo la differenza dei moduli dei numeri assegnati.

$(+8)+(-2)=+6$
$(+5)+(-12)=-9$

da questa caratteristica si deduce che la somma di due numeri opposti è zero.

$(-5)+(+5)=0$

• La somma di un numero relativo con lo zero è uguale al numero stesso, per questo motivo lo zero (0) è considerato l'elemento neutro dei numeri relativi rispetto all'addizione (come nel caso dei numeri naturali).

$(-3)+0=-3$
$(-7)+0=-7$

• Normalmente le operazioni con i numeri relativi si svolgono in modo mere macchinoso cioè, scrivendoli senza parentesi, uno di seguito all'altro, cioecano col proprio segno (chiamandoli il segno + degli addendi).

$(+5)-(-3)+(-7)+(-2)=(-4)$
$(+3)+(-2)+(+1)+(-4)+(+5)=(+3)$
$=3-2+1-4+5=(4)-(2+4)=(9)-(6)=3$

• Quando il primo addendo è positivo, si può anche tralasciare di scrivere il segno + e dire, ad es. al posto di scrivere

$+8+12-10$

si può scrivere anche

$8+12-10$

L'addizione di più numeri relativi gode delle proprietà commutativa e associativa.

Proprietà commutativa

La somma di più numeri relativi non cambia comunque si usi l'ordine degli addendi.

$$a+b+h+\ldots \longrightarrow +(+)+(-)+(+)+(+)$$

Proprietà associativa

La somma di più numeri relativi non cambia, se ad alcuni essi si sostituisce la loro somma effettuata.

Specifichiamo prima che

$$\underbrace{a+b+c+\ldots}_{\text{addendi}}=\underbrace{s}_{\text{somma}}$$

questa proprietà può essere espressa anche attraverso la regola seguente pratica: in una somma di più numeri relativi, si può raccchiudere tra parentesi un numero qualsiasi di addendi, scrivendo preceduta da + la somma effettuata (o gruppi) degli stessi addendi.

$+8-20+9-12+[+3]=[+8]-[+20]+[+9]-[+12]+[+3]=$
$=(+20)-(+32)=-12$ anche $-20+8=-12$

In una somma algebrica di più addendi, in particolare a gli addendi vengono sostituiti con la somma effettuata, non devono necessariamente rimanere positivi consecutivi, perché in virtù della proprietà commutativa possono essere scritti successivamente, purché in testa della proprietà commutativa possono essere scritti successivamente, purché in testa della somma venga posto il segno + e la somma effettuata.

Proprietà invariantiva

La somma di più numeri relativi non cambia, se ad uno di essi si aumentano di loro prodotto effettuato.

Cioè, ritornò la regola (a b) + a (b c) resta per i numeri naturali.

Proprietà invariantiva

Il prodotto di più numeri relativi non cambia se ad alcuni di essi si moltiplicano il loro prodotto effettuato.

Cioè, ritornò la regola (a b) + a (b c) resta per i numeri naturali.

Proprietà invariantiva rispetto alla somma

Per moltiplicare una somma algebrica per un numero, o viceversa, si può moltiplicare ciascuno degli addendi della somma per quel numero e poi sommare i prodotti parziali ottenuti.

$a(b+c)=ab+ac$

l'operazione inversa a $ab+ac=a(b+c)$ è il raccoglimento a fattor comune.

Proprietà invariantiva

Il prodotto di più numeri relativi non cambia il numero dell'ordine dei fattori.

Cioè, ritornò la regola $ab=ba$ è vera per i numeri naturali.

Proprietà associativa

Il prodotto di più numeri relativi non cambia se ad alcuni di essi si sostituisce il loro prodotto effettuato.

Cioè, ritornò la regola $(ab)c=a(bc)$ è vera per i numeri naturali.

Proprietà invariantiva rispetto alla somma

Per moltiplicare una somma algebrica per un numero, o viceversa, si può moltiplicare ciascuno degli addendi della somma per quel numero e poi sommare i prodotti parziali ottenuti.

$a(b+c)=ab+ac$

l'operazione inversa a $ab+ac=a(b+c)$ è il raccoglimento a fattor comune.

Proprietà invariantiva

Dati due numeri relativi (o termini) quando il loro prodotto è uguale a +1.

$$\text{l'reciproco di un numero } a\neq 0 \text{ è indicato con } \frac{1}{a} \quad \text{quindi, per definizione, si ha:} \quad a\cdot\frac{1}{a}=1 \quad \text{con } a\neq 0$$

Ad. es. sono reciproci tra loro +6 e $+\frac{1}{6}$ oppure $-\frac{1}{3}$ con -3 ecc.

ELEVAZIONE AD Z...

La sottrazione, nell'insieme Z dei numeri relativi può essere formalizzata come già l'atto per i numeri naturali. La sottrazione è l'operazione aritmetica che permette di calcolare la differenza tra due numeri dati e il primo di questi due numeri è detto minuendo e il secondo sottraendo.

La differenza di due numeri nell'insieme Z dei numeri relativi, esiste sempre, ed è il numero che aggiunto al sottraendo fornisce come risultato il minuendo (differenza-sottraendo=minuendo).

$$\underbrace{a}_{\text{minuendo}}-\underbrace{b}_{\text{sottraendo}}=\underbrace{c}_{\text{differenza}}$$

$$a-b=c \quad \text{se} \quad b+c=a$$

La differenza di due numeri relativi numeri relativi si indica ponendo tra il primo termine (a 9 minuendo) ed il secondo termine (b 4 sottraendo) il segno -.

La differenza tra i due numeri a e b la indichiamo a b. Indicando con L (a) l'opposto di a lo avremo:

a-b=a+L(b) dunque potremo scrivere la seguente:

$$a-b=a+(-b)$$

per, si può aggiungere che: un numero a qualche termine e potremmo, oppure il segno - è come se quello permutasti o qual termine fosse moltiplicato per -1 dunque:

$$(-8)\cdot(-9)=8\cdot(-1)\cdot 9\cdot(-1)=8\cdot(-9)=+72$$

Nell'insieme Z dei numeri relativi la sottrazione si può sempre eseguire, anche quando i sottraendi è maggiore (in modulo) del minuendo, al contrario di quanto accade nell'insieme N dei numeri naturali dove è il caso solo di numeri positivi.

Proprietà invariantiva della sottrazione

La sottrazione tra due numeri relativi gode della proprietà invariantiva, cioè, la differenza tra due numeri non cambia aggiungendo o togliendo una stesso numero sia al minuendo che al sottraendo.

$$a-b=(a+c)-(b+c)$$

anche questa già vista nei numeri naturali. Ad es.

$(-8)-(-5)=(-8-2)-(-5-2)$

Siccome la sottrazione di due numeri relativi può essere ricondotta ad una addizione, l'addizione e la sottrazione di numeri relativi possono essere considerati una unica operazione. Si può sopprimere

ein la somma (+8)+(-9) dei due numeri relativi (+8) e (+9)
ein la differenza (+8)-(9) dei numeri relativi (+8) e (+9)

Un insieme di numeri relativi legati tra loro da segni di addizione e sottrazione prenove formare una struttura chiamata somma algebrica. Ad es.:

$(+2)-(+5+6)-7)(-4)+(7)$

è una somma algebrica perché in base alle definizioni appena date può essere ricondotta ad una somma che indichiamo:

$(+2)+(-5)+(-6)+(-7)$

da qui si nota come la somma algebrica non è altro che una somma di numeri relativi, anche se poi la sua rappresentazione più frequente è $2-5-6-7$

Combinando espressione: se ora eseguiamo la sottrazione:

$-20-(5+4-9)$

dovremo sommare al -20 l'opposto della somma tra parentesi ma quest'ultima operazione si ottiene cambiando il segno a tutti i termini inclusi nella parentesi stessa

$-20-5-4+9$

per la regola pratica della proprietà dissociativa della somma avremo

$-20-5-4+9$

Si conclude che: per togliere da un numero una somma algebrica, basta aggiungere a quel numero gli addendi della somma algebrica con il segno cambiato.

Dunque, dobbiamo ancora stipulare se davvero ad una parentesi (+) è negativo - si può togliere la parentesi a patto di cambiare segno a tutti i termini della somma.

Si può facilmente intuire che questa regola può essere applicata anche in senso contrario.

$7+[4-2+5-1]=7+4-2+5$

ESPRESSIONE CON Z...

Il quoziente di due numeri relativi, di cui il secondo (il divisore) diverso da zero, si ottiene moltiplicando il primo (dividendo) per il reciproco del secondo.

Il quoziente tra due numeri relativi è un intero interpretando tra il primo termine (dividendo) ed il secondo (divisore) Z segno - oppure la loro di frazione indiTerminante, con tre possibili scrittori equivalenti

$$a:b=\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}$$

Avendo ricordato la divisione ad una moltiplicazione, ricordiamo che anche in questo caso valgono le regole dei segni. In sintesi: il quoziente di due numeri relativi ha per valore assoluto il quoziente dei loro valori assoluti per segno + o -, secondo che i due numeri abbiano lo stesso segno oppure segno contrario.

Estendiamo la regola

$$\frac{+}{+}=+ \qquad \frac{0}{+}=0 \qquad \frac{+}{0}=\text{impossibile} \qquad \frac{0}{0}=\text{indeterminato}$$
$$\frac{-}{-}=+ \qquad \frac{0}{-}=0$$

Proprietà invariantiva della divisione

Il quoziente tra due numeri relativi non cambia se vengono moltiplicati entrambi per uno stesso numero diverso da zero.

Questa proprietà rappresentata, è alla base della semplificazione dei quozienti fare sulle frazioni

$$(+12):(+15)=\frac{(+12):(+3)}{(+15):(+3)}=\frac{+4}{+5}=\frac{-24}{-3}=\frac{-8}{-5}$$

Siccome la sottrazione introdotta si vuta che il quoziente di due numeri relativi resta invariato se si cambiano simultaneamente i segni al dividendo e al divisore

$$\frac{(+8)}{(+4)}:\frac{(+8):(+2)}{(+4):(+2)}=\frac{(+8):(-2)}{(+4):(-2)}=\frac{(-8):(+2)}{(-4):(+2)}=\frac{-8}{-4}=2$$

e semplice, è come se moltiplicassimo sia il numeratore che il denominatore per -1, o qui fare, perché $(-1)\cdot(-1)=1$, cioè, è come moltiplicare la frazione originaria per 1, qualsiasi numero moltiplicato per 1 rimane invariato (l'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione).

Quest'ultima regola viene usata spesso per ragioni di comodità, perché quando (+) una frazione è preferisce sempre avere un denominatore positivo.

Una seconda articolazione da questa proprietà è: Per dividere un prodotto per un numero si può dividere uno solo dei fattori per quel numero e moltiplicare gli altri fattori per il quoziente ottenuto

$$\frac{7\cdot 6}{2}=\frac{7}{2}\cdot 6=3{,}5\cdot 7=2\cdot 7=70$$

Proprietà distributiva della divisione rispetto alla somma

Per dividere una somma per un numero si può dividere ciascun addendo della somma per quel numero e poi sommare i quozienti parziali ottenuti:

$$\frac{35+35+50}{5}=\frac{35}{5}+\frac{35}{5}+\frac{50}{5}=7+7+10=20$$

Raccoglimento a fattor comune

Ricordiamo sulle proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma (algebrica):

$(-2)(20-2)=20$ quantomeno anche scrivere il contrario: $20=(-2)(-2)$

si chiama raccoglimento a fattor comune perché il suo raccolto il fattore comune (2 2 in questo caso) del termine della somma algebrica.

Questa operazione può anche essere eseguita in presenza di quozienti indicati quando tutti i termini di una somma algebrica contengono uno stesso fattore. Si somma il quoziente di ciascun addendo per il fattore comune per il medesimo divisore.

$$\frac{21}{4}-\frac{9}{4}+\frac{12}{4}=\frac{1}{4}\left(\frac{21}{1}-\frac{9}{1}+\frac{12}{1}\right)=\frac{1}{4}(21-9+12)=\frac{24}{4}=\frac{747-67+48}{70}=\frac{741}{70}$$

Potenziamento

L'insieme dei numeri interi relativi si indica con la lettera Z. L'insieme Z comprende:

- i numeri interi negativi;
- lo zero (che non ha segno)
- i numeri interi positivi.

Possiamo notare come nell'insieme Z sia possibile definire le varie operazioni aritmetiche e come sia sempre possibile eseguire anche l'operazione di sottrazione (non sempre possibile in N). Quindi:

- l'insieme Z è chiuso rispetto alla sottrazione (si può sempre fare);
- l'insieme Z è un ampliamento dell'insieme N.

ESPRESSIONI...

Una espressione aritmetica è un insieme di numeri separati l'uno dagli altri da segni di operazioni.

Esse è...Insieme, una qualunque scrittura che indica delle operazioni aritmetiche da eseguire con i numeri relativi.

Calcolare una espressione algebrica significa trovare il numero relativo che rappresenta il risultato delle operazioni indicate.

Non necessariamente le operazioni che ci sono devono essere eseguite nell'ordine in cui si presentano.Ad es. nell'espressione

$$a+12$$

è errato eseguire prima la somma $a+5$ e poi moltiplicare il risultato per 5.

Si deve prima eseguire la moltiplicazione $5\cdot 5$ e poi sommare il risultato ad a: $a+5\cdot 5=a+25$

La moltiplicazione ha priorità sulla addizione.

Il grado di priorità, cioè, l'ordine di precedenza delle operazioni è:

1) elevamento a potenza
2) moltiplicazione e divisione
3) addizione e sottrazione

Le operazioni che hanno lo stesso grado di priorità, come moltiplicazioni e divisioni oppure addizioni e sottrazioni si devono eseguire nell'ordine in cui sono indicate.

In una espressione, una volta calcolate le potenze e eseguiti tutti, sempre nell'ordine indicato, moltiplicazioni e divisioni, da ultimo, sempre nell'ordine in cui sono indicate, addizioni e sottrazioni.

E' ammessa un'unica eccezione: se in una espressione è indicata una somma di tre o più numeri, oppure il prodotto di tre o più numeri, vale la proprietà associativa, dunque il risultato non cambia anche se si eseguono le operazioni nell'ordine che preferiamo.

esempio: calcola il valore dell'espressione 12-2:6

L'espressione contiene solo moltiplicazioni e divisioni, cioè, operazioni con lo stesso grado di priorità. Eseguiamo allora, le operazioni nell'ordine indicato:

$12-2:6=12-\frac{2}{6}$

esempio: calcola il valore dell'espressione $15-7\cdot 2+20$

Si devono eseguire prima le moltiplicazioni:

$15-7\cdot 2+20=15-14+20$

esempio: calcola il valore dell'espressione $3\cdot 10^2+4\cdot 10{,}2^2$

Calcolo prima le potenze $3\cdot 100+4\cdot 104$

addesso l'ascissa le moltiplicazioni

$3\cdot 2000+4048$

addesso l'ascissa le divisioni $6.500+5.948$

Supponiamo di voler risolvere l'espressione

$5-4+3$

con questa scrittura, dovremmo eseguire prima la moltiplicazione di $4+3$ e poi addizionare 5 al risultato.

Se invece si volesse prima eseguire la somma $5+4$ e poi la moltiplicazione per 3, si dovrebbe scrivere

$(5+3)\cdot 3$

Ad es. nell'espressione 12+(5-2) l'insieme prima eseguire la sottrazione 5-2 poi moltiplicare per 12 il risultato:

$12+(5-2)=12+3=36$

allo stesso modo nell'espressione $(5+4)^2$

si deve prima eseguire la somma indicata nella parentesi e poi l'elevamento a potenza, poi ecco:

$(5+4)^2=9^2=81$

Entrano così tipi di parentesi

(+) = parentesi tonde

[+] = parentesi quadre

{+} = parentesi graffe

hanno tutte la stessa funzione: cambiare l'ordine di priorità delle operazioni all'interno di una espressione.

Parentesi quadre nelle quali parentesi tonde

Per togliere le parentesi da un espressione si devono doppiamo eseguire le operazioni contenute nelle coppie di parentesi più interne (che non contengono ulteriori parentesi al loro interno) ai termini di prima il risultato ottenuto.

Alla fine, quando l'espressione non contiene più parentesi si procede nel calcolo rispettando l'ordine di priorità delle varie operazioni.

Nell'esempio

$[7-2(6-5+3)+4][2-(5+7)-7]+1$ avremo

$[7-[10-5+3]+4][2-12-7]+1=$

$[7-[8]+4][-17]+1=$

$[7-8+4][-17]+1=$

$[7-12][-17]+1=$

$-5\cdot[-17]+1=$

$85+1=86$

Qualche suggerimento sulle modalità di soluzione di una espressione aritmetica è riportato in questa pagina.

Numeri Relativi – parte 03

Confronto di numeri interi relativi

VIDEO: https://youtu.be/Z0LE1eBEwxE

Confronto di numeri interi relativi: ecco la lezione che fa per te!

Confrontare due numeri interi relativi significa stabilire se uno è maggiore, minore o uguale ad un altro.

Ricordiamo quali sono i simboli corretti:

- MAGGIORE: >
- MINORE: <
- UGUALE: =

Nella pratica si possono seguire alcune indicazioni per eseguire facilmente il confronto di numeri interi relativi.

Prima di vedere quali sono le regole da applicare, è bene precisare il significato di **valore assoluto di un numero intero relativo**.

Il valore assoluto (o modulo) di un numero intero relativo *è il numero che si prende in considerazione senza il segno che lo precede*.

Esempi:

- + 8 → il suo valore assoluto è 8
- – 11 → il suo valore assoluto è 11

Solitamente il valore assoluto si indica in questo modo: |- 13| = 13, cioè si racchiude il numero intero relativo tra due segni/barre verticali proprio per indicare che quel numero va considerato senza il suo segno.

Numeri interi relativi concordi

Si parla di numeri interi relativi **concordi** quando i numeri che si prendono in considerazione **hanno lo stesso segno**.

Ecco allora che *tra due numeri relativi concordi positivi è maggiore quello che ha valore assoluto maggiore*.

Esempi:

- + 5 > + 2
- + 4 < + 20

Tra due numeri relativi concordi negativi è maggiore quello che ha valore assoluto minore.

Esempi:

- – 1 > – 4
- – 5 < – 3

La "regola" sopra descritta per i numeri relativi concordi negativi non è sempre immediata e facile da ricordare: in altri termini, considerando la linea dei numeri, si può dire che *tra due numeri relativi concordi negativi è maggiore quello che è più vicino allo 0*.

Riprendendo i due esempi sopra riportati (e osservando la linea dei numeri) risulta più facile capire che – 1 > – 4 perché – 1 è più vicino allo 0 rispetto a -4; allo stesso modo, risulta più facile capire che – 5 < – 3 perché – 5 è più lontano dallo 0 rispetto a – 3.

In aggiunta a quanto affermato, *due numeri relativi concordi (positivi o negativi) che hanno lo stesso valore assoluto sono uguali*.

Esempi:

- + 7 = + 7
- – 9 = – 9

Numeri relativi discordi

Si parla di numeri interi relativi **discordi** quando i numeri che si prendono in considerazione **hanno segno diverso**.

Ecco allora che *tra due numeri relativi discordi (quindi, uno positivo e l'altro negativo) è sempre maggiore quello con segno positivo*.

Esempi:

- + 4 > – 5 – 12 < + 3

Operazioni con i numeri interi relativi

VIDEO: https://youtu.be/70bJJq-G81k

Quando si parla di **numeri relativi** si deve fare particolarmente attenzione ad alcune regole o semplici passaggi che permettono di trovare i risultati corretti: di seguito sono riportate le **regole da applicare** nelle **operazioni con i numeri interi relativi**.

Addizione di numeri interi relativi

- **Numeri relativi concordi** *(hanno lo stesso segno): il risultato avrà il segno uguale a quello dei numeri relativi iniziali e valore assoluto uguale alla somma dei valori assoluti dei numeri iniziali.*

  Esempi:

  (+ 3) + (+ 5) = + (3 + 5) = + 8

  (– 7) + (– 4) = – (7 + 4) = – 11

- **Numeri relativi discordi** *(hanno il segno diverso): il risultato avrà il segno uguale a quello del numero che ha valore assoluto maggiore e valore assoluto uguale alla differenza dei valori assoluti dei numeri iniziali.*

  Esempi:

  (+ 4) + (– 6) = – (6 – 4) = – 2

  (– 2) + (+ 5) = + (5 – 2) = + 3

-

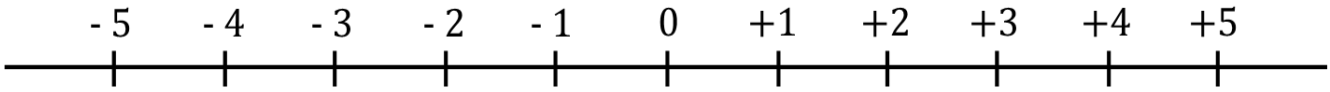
- **Sottrazione di numeri interi relativi**

  VIDEO: https://youtu.be/e-YP8f1OBCQ

  Se davanti ad una parentesi si trova il segno meno (–), il segno del numero dentro parentesi cambia. Quindi, il primo passaggio consiste nel togliere le parentesi, applicando la regola del cambio segno. In seguito, si trova il risultato applicando le regole dell'addizione.

  Esempi:

  (+ 2) – (+ 6) = + 2 – 6 = – 4
  Il – davanti al (+ 6) cambia il segno e ottengo – 6; poi eseguo il calcolo;
  (– 3) – (– 7) = – 3 + 7 = + 4
  Il – davanti al (– 7) cambia il segno e ottengo + 7; poi eseguo il calcolo;
  (+ 4) – (– 5) = + 4 + 5 = + 9
  Il – davanti al (– 5) cambia il segno e ottengo + 5; poi eseguo il calcolo;
  (– 1) – (+ 9) = – 1 – 9 = – 10
  Il – davanti al (+ 9) cambia il segno e ottengo – 9; poi eseguo il calcolo;
  Per il calcolo del risultato può essere utile, almeno inizialmente, utilizzare la linea dei numeri.



-

Moltiplicazione di numeri interi relativi

VIDEO: https://youtu.be/kheTKAXYIIk

È importante ricordare le regole dei segni sotto riportate:

+ · + = + ("più per più fa più")
– · – = + ("meno per meno fa più")
+ · – = – ("più per meno fa meno")
– · + = – ("meno per più fa meno")

Esempi:

(+ 3) · (+ 5) = + (3 · 5) = + 15
(– 2) · (– 6) = + (2 · 6) = + 12
(+ 5) · (– 4) = – (5 · 4) = – 20
(– 2) · (+ 8) = – (2 · 8) = – 16

Divisione di numeri interi relativi

VIDEO: https://youtu.be/UROcYCEdWkk

È importante ricordare le regole dei segni sotto riportate:
+ : + = + (“più diviso più fa più”)
– : – = + (“meno diviso meno fa più”)
+ : – = – (“più diviso meno fa meno”)
– : + = – (“meno diviso più fa meno”)

Esempi:
(+ 30) : (+ 5) = + (30 : 5) = + 6
(– 20) : (– 4) = + (20 : 4) = + 5
(+ 15) : (– 3) = – (15 : 3) = – 5
(– 12) : (+ 4) = – (12 : 4) = – 3

Potenza di numeri interi relativi

VIDEO: https://youtu.be/LOCajHmOdyw

•*La potenza di un **numero relativo positivo** dà come risultato un numero positivo, con valore assoluto pari alla potenza del valore assoluto di partenza.*

Esempi:

$$(+5)^3 = +(5\cdot5\cdot5) = +125$$

$$(+3)^2 = +(3\cdot3) = +9$$

•*La potenza di un **numero relativo negativo** dà come risultato:*
– Un numero positivo – se l’esponente è pari – con valore assoluto pari alla potenza del valore assoluto di partenza.
– Un numero negativo – se l’esponente è dispari – con valore assoluto pari alla potenza del valore assoluto di partenza.

Esempi:

$$(-2)^2 = +(2\cdot2) = +4$$

$$(-3)^4 = +(3\cdot3\cdot3\cdot3) = +81$$

$$(-3)^3 = -(3\cdot3\cdot3) = -27$$

$$(-5)^5 = -(5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5) = -3125$$

SOURCE: https://www.matematicaoggi.it/operazioni-con-i-numeri-relativi/

I NUMERI RELATIVI
ESERCIZI

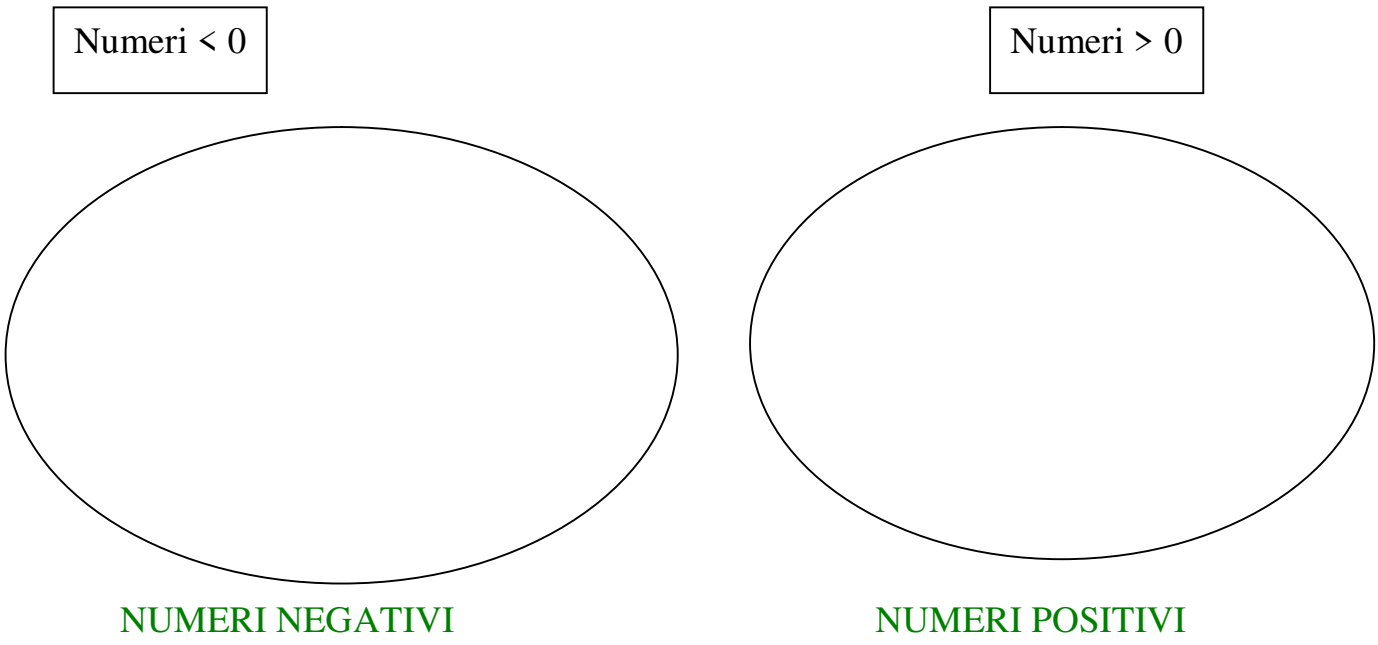
1. Numeri interi relativi: applicazioni nella vita quotidiana
2. Numeri concordi, discordi, opposti
3. Modulo
4. Ordinamento e confronto

NUMERI RELATIVI

Tutti i numeri preceduti da un segno "+" o da un "-" si chiamano NUMERI RELATIVI.
In particolare:
- i numeri preceduti dal segno +, si dicono NUMERI POSITIVI (> 0)
- i numeri preceduti dal segno -, si dicono NUMERI NEGATIVI (<0)
- lo ZERO non è né positivo né negativo, quindi non è preceduto da alcun segno.

COLLOCA I NUMERI NELL'INSIEME CORRISPONDENTE

-3; +1; +8; +6; -8; + 502; -2; 0; -20; +11; +4; -13; +13; +211; -9; -4; -15; +7



- 10	- 9	- 8	- 7	- 6	- 5	- 4	- 3	-2	- 1	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10

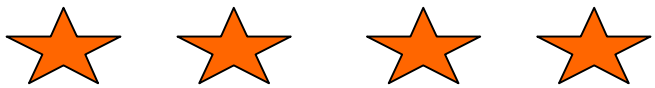
Aiutandoti con la linea dei numeri, trova il numero a cui corrisponde il punto di mezzo tra:

- 2		- 4
- 3		+ 3
- 1		+ 1
- 1		- 5
- 6		- 4
+ 7		- 3
- 2		+ 4
+ 9		- 1

- 4		+ 10
+ 11		- 7
- 14		- 10
- 8		- 12
+ 1		- 3
+ 12		+ 4
+ 10		+ 14
+ 9		+ 7

ESERCIZIO.
Con quale segno, positivo o negativo, indicheresti i numeri che esprimono:

	a) un credito di 100 €
	b) la quota di 155 metri sopra il livello del mare
	c) una temperatura di 13° sopra lo zero
	d) l'anno 300 a.C.
	e) il secondo piano sotto il livello del terreno.



Individua, fra le grandezze date nei seguenti esercizi, quali possono essere espresse mediante i numeri relativi.

1)
- (a) Paolo è alto 140 m ☐
- (b) Antonio, giocando, è a due penalità ☐
- (c) Maria ha avuto un premio di 75 € ☐

2)
- (a) l'azienda ha un deficit di 4.000 € ☐
- (b) Martina ha 15 anni ☐
- (c) Il mio libro ha 315 pagine ☐

3)
- (a) La popolazione è diminuita di 5.000 unità ☐
- (b) Ho un debito di 7.500 € ☐
- (c) La pianta cresce di 1 cm alla settimana ☐

ESERCIZIO.
Aiutati con la linea dei numeri qui sotto rappresentata per riordinare i numeri sottostanti in modo decrescente.

- 10	- 9	- 8	- 7	- 6	- 5	- 4	- 3	-2	- 1	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10

a) – 7 ; - 6; + 2; - 1; O; - 4; + 5

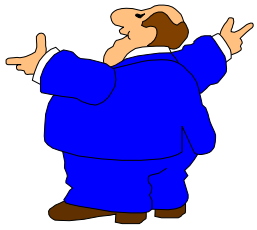
b) +4; + 1; + 2; + 5; + 8; + 3; + 6

c) + 5; + 3; + 6; - 8; - 5; -3

d) + 2; - 9; - 8; + 7; + 6; - 2

e) + 4; - 3; 0; - 7; + 3; + 2

ESERCIZIO.
Utilizza la linea dei numeri che vedi rappresentata qui sotto per riordinare i numeri in modo crescente.



- 10	- 9	- 8	- 7	- 6	- 5	- 4	- 3	-2	- 1	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10

f) – 3 ; + 3; + 2; - 6; - 7; + 9

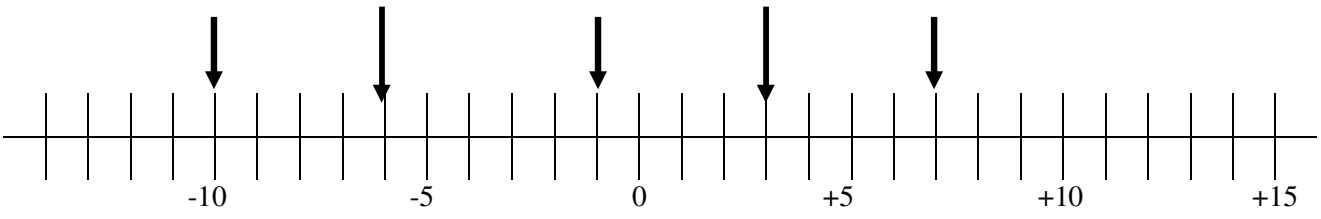
g) +2; - 3; - 8; + 3; - 1; - 2;

h) + 7; - 5; - 4; + 2; - 2; + 5

i) - 8; + 6; + 5; - 9; - 6; + 1

j) + 4; - 3; 0; - 7; + 3; + 2

Quali numeri corrispondono a quelli indicati dalle freccette sulla retta orientata.



VALORE ASSOLUTO

Il VALORE ASSOLUTO di un numero relativo è il numero che si ottiene togliendo il segno; il suo simbolo è dato da 2 lineette "| |".

Es. $|-9| = 9$ $|+18| = 18$

$|+7| = 7$ $|-7| = 7$

Quindi il numero relativo – 9 ha valore assoluto 9, il numero relativo + 18 ha valore assoluto 18 …….

ESERCIZIO.
Scrivi i valori assoluti dei seguenti numeri:

a)	$\|+2\| =$	k)	– 522
b)	– 5	l)	+ 100
c)	+ 10	m)	0
d)	– 13	n)	– 1,428
e)	+ 17	o)	+ 1/2
f)	+ 213	p)	+ 0,1
g)	– 9	q)	– 1 428
h)	– 1231	r)	+ 1 428
i)	+ 0,028	s)	+ 8
j)	– 2	t)	- 8

I numeri relativi si dicono:
CONCORDI quelli che hanno lo stesso segno,

DISCORDI quelli che hanno il segno diverso tra loro.

Es. + 2 e + 5 sono concordi
- 1 e + 4 sono discordi

Due numeri relativi discordi, ma che hanno lo stesso modulo si dicono OPPOSTI.

Es. - 3 e + 3
- 10 e + 10

Esercizio.
Delle seguenti coppie di numeri indica quali sono formate da numeri opposti segnando con una crocetta V (vero) o F (falso).

+ 10	e	- 10	V	F
+ 3	e	+ 4	V	F
- 2	e	+ 8	V	F
- 7	e	+ 7	V	F
+ 144	e	- 414	V	F
- 1/2	e	+ 1/2	V	F
+ 5	e	+ 6	V	F
+ 5	e	- 5	V	F
+ 421	e	- 421	V	F
+ 0,008	e	- 0,008	V	F

Quali fra le seguenti coppie sono formate da numeri <u>discordi</u>?

a) - 2 e + 13 _____

b) - 14 e - 71 _____

c) + 42 e + 2 _____

d) - 13 e - 1 _____

e) + 238 e - 198 _____

f) + 238 e + 198 _____

quali, invece, sono <u>concordi</u>?

a) - 4 e + 3 _____

b) - 4 e - 7 _____

c) + 4 e + 2 _____

d) + 4 e - 5 _____

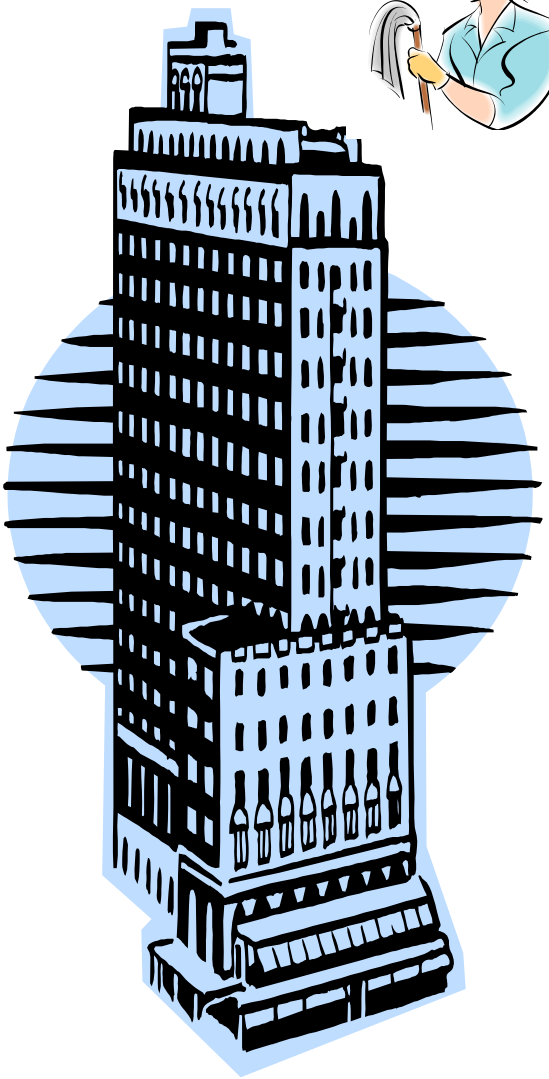
e) - 12 e - 23 _____

f) + 40 e - 73 _____

g) + 72 e + 215 _____

f) + 4312 e - 500 _____

Giulia lavora in un albergo con 26 piani, di cui 8 si trovano sotto terra e 18 sopra. Ha l'ordine di pulire:



+ 18	B
+ 17	O
+ 16	X
+ 15	M
+ 14	F
+ 13	D
+ 12	A
+ 11	K
+ 10	Y
+ 9	G
+ 8	S
+ 7	A
+ 6	N
+ 5	H
+ 4	C
+ 3	I
+ 2	Z
+ 1	L
0	O
- 1	Q
- 2	U
- 3	E
- 4	C
- 5	A
- 6	T
- 7	R
- 8	U

- il 1° giorno, tutti i piani <u>concordi, pari e positivi</u>:

- il 2° giorno, tutti quelli <u>concordi, dispari e negativi</u>:

- il 3° giorno, i piani <u>opposti fino al 3°</u>:

- il 4° giorno, i piani <u>opposti dal 5° all'7°</u> e il piano 0:

Giulia, durante le sue pulizie ha trovato un piccolo animaletto. In base ai numeri relativi che tu hai riportato il 4° giorno e alle corrispondenti lettere che trovi accanto al piano, prova ad indovinare di cosa si tratta.

Completa il confronto con:

> (maggiore)
< (minore)
= (uguale)

+ 5	☐	+ 6	- 5	☐	+ 6
+ 5	☐	- 6	- 5	☐	- 6
+ 2	☐	- 3	- 3	☐	- 8
+ 1,7	☐	- 12	- 0,008	☐	+ 0,05
+ 3	☐	- 7	+ 2	☐	- 2,22
+ 9	☐	- 4	- 1	☐	- 0,9

Di queste coppie, scrivi quelle:

CONCORDI =

DISCORDI =

OPPOSTI =

Esegui le seguenti operazioni:

+ 7 – 5 =

- 8 – 4 =

+ 3 – 4 =

+ 10 – 5 =

+ 2 – 2 =

+ 18 – 9 =

+ 6 – 12 =

+ 4 – 9 =

+2 – 15 =

+ 3 – = = | |=

+ 10 – 1 =

+ 6 – 4 =

- 21 + 21 =

+ 5 – 5 =

- 4 – 2 =

Di queste ultime 6 calcola il valore assoluto e otterrai una data. Quale?

Dei seguenti gruppi di numeri indica quello che ha valore assoluto maggiore.

(a) – 15; + 12

(b) + 7; + 3

(c) – 10; + 7; + 9

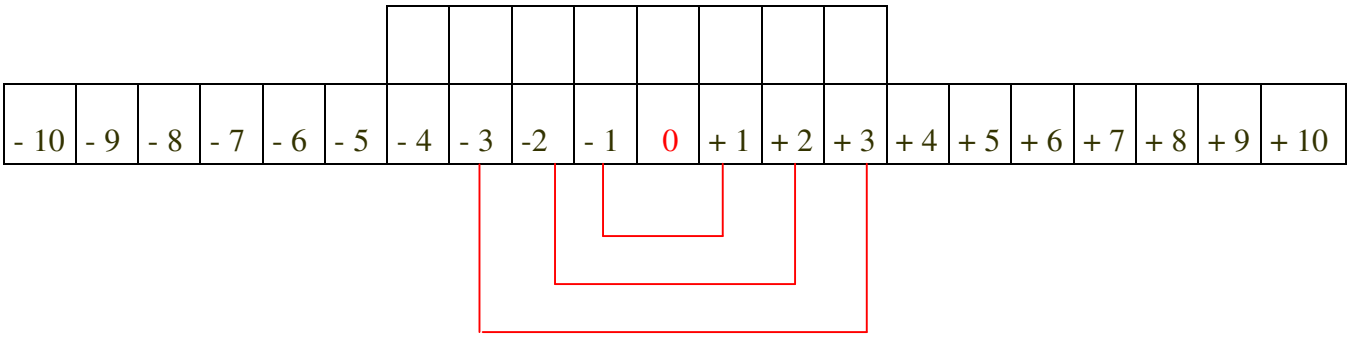
(d) – 60; + 1

(e) – 3; - 5; - 2

(f) – 7; - 9; + 10

Esiste una coppia di numeri <u>opposti</u> compresi tra:

Es. -4; + 3 ⟶ - 3 e + 3; - 2 e + 2; - 1 e + 1



(a) – 1 e + 8 ⟶

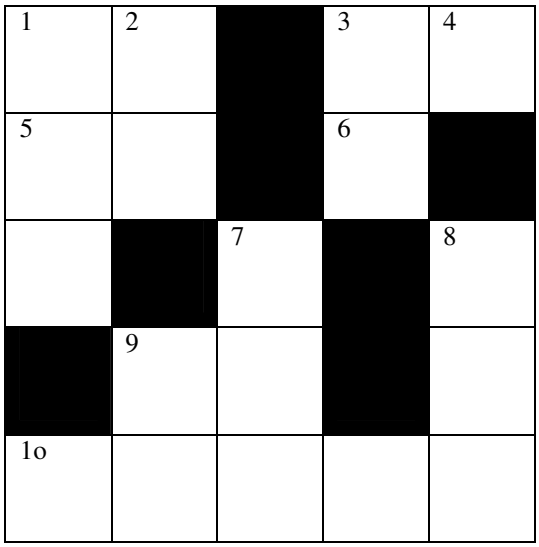
(b) – 5 e + 7 ⟶

(c) – 3 e 0 ⟶

(d) 0 e + 5 ⟶

(e) – 6 e + 9 ⟶

Riempi la tabella con i numeri suggeriti dalle indicazioni riportate sotto (se necessario, riserva la prima casella al segno + o -).



ORRIZZONTALI

1. L'opposto di + 7
3. è maggiore di 65 e minore di 67
5. 7 + 8
9. – 1 – 1
10. l'opposto di – 1883

VERTICALI

1. – 12 – 1 + 2 + 1
2. è il valore assoluto di + 75
3. è il valore assoluto di – 64
7. l'opposto di – 28
8. + 5 – 4 + 10 + 2=

- 10	- 9	- 8	- 7	- 6	- 5	- 4	- 3	-2	- 1	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10