RISORSE DIDATTICHE.

【ResearchGate Project】 *By … 0000-0001-5086-7401 & lnkd.in/erZ48tm*

·······

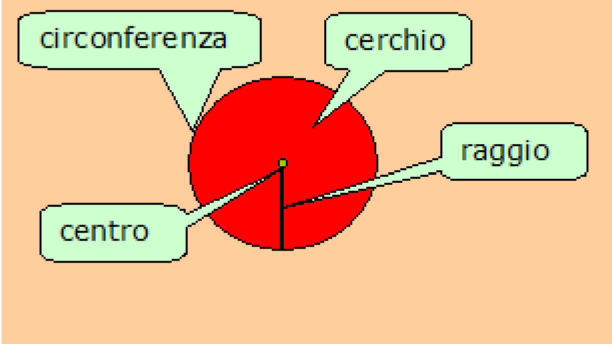
······

NOTA BENE: Queste slide offrono una **sintesi** di alcuni temi trattati a lezione (peraltro secondo un approccio lievemente diverso). Vengono messe a disposizione degli studenti come supporto allo studio, ma non sostituiscono in nessun modo i testi indicati in bibliografia

Circonferenza
Geometria solida 1

Veronica Gavagna

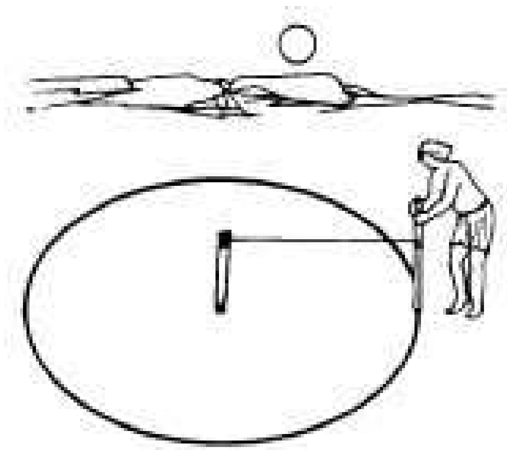
Che cosa è una circonferenza?



Una circonferenza è una linea che gode della seguente proprietà:

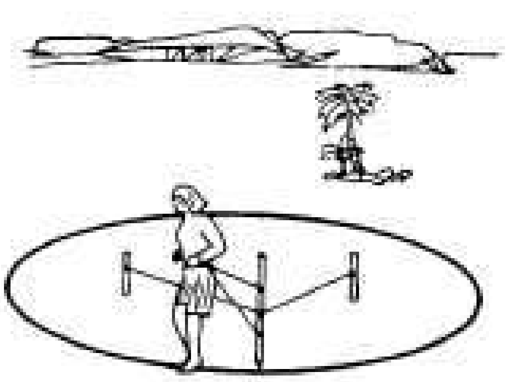
tutti i punti che appartengono alla linea sono ugualmente distanti da un punto fissato, che si chiama centro (della circonferenza)

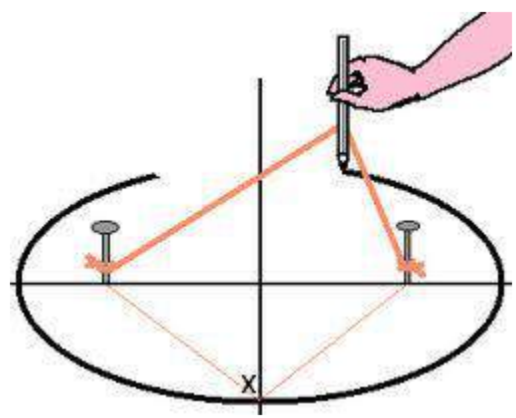
La distanza di un punto della circonferenza dal centro si chiama raggio

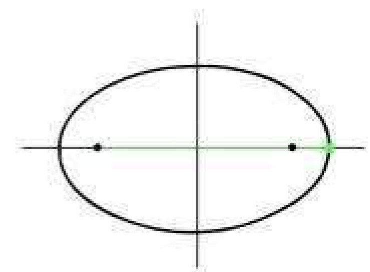


Piccola curiosità:
E se invece piantiamo due pali?

Immaginiamo di piantare due paletti e di fissare una corda (di lunghezza arbitraria) a questi paletti; immaginiamo quindi di muoverci mantenendo tesa la corda. Descriveremo una curva oppure no?







ellisse

Come si calcola la lunghezza di una circonferenza di raggio r?

Si divide la classe in gruppi; ogni gruppo sceglie oggetti nei quali appaia una circonferenza (monete, piatti, ruote, medaglie, bottiglie…). Ogni gruppo misura con buona approssimazione il diametro di ciascuna circonferenza e, con il metodo del filo di cotone, fornisce una misura approssimata della circonferenza.

oggetto misurato	diametro in cm (a)	circonferenza in cm (b)	rapporto tra b ed a
disco	20	62,4	3,12
piatto	12	37,8	3,15
...	......	......	......

Misure sempre più accurate porteranno a far capire che quel rapporto tra le misure della circonferenza e del diametro ha un andamento quasi regolare compreso tra 3 e 3,2 ma con valori che si addensano attorno a 3,14 o 3,15.

In realtà quel rapporto ha ***un valore costante e non dipende dal tipo di circonferenza scelto.***

Il valore costante di tale rapporto è il **numero irrazionale π.**

I numeri irrazionali si possono esprimere come rapporti?

Il numero π

Il numero irrazionale π non si può esprimere come rapporto tra due interi e la sua espansione decimale è **illimitata e aperiodica**

Nella scuola primaria è del tutto accettabile usare l'approssimazione 3,14.

$$\frac{Circonferenza}{diametro} = \pi$$

$$\boldsymbol{C = 2r \cdot \pi \sim 2r \cdot 3,14}$$

Piccola digressione su pi greco (π)

Come ricordare (alcune) cifre di π?

3, 14159265358979323846264338327950288419716939937510 5820974944 5923078164 0628620899 8628034825…..

Uno stratagemma (numero lettere=parte intera + decimali)

- ***Ave o Roma o Madre gagliarda di latine virtù che tanto luminoso splendore prodiga spargesti con la tua saggezza. Che n'ebbe d'utile Archimede da ustori vetri sua somma scoperta? Pigreco***
- *Noi e loro, a volte, bisognamo di notare cifre fra molte, affinché calcolare possiam lunghezze. Con il mio versetto quel numero si arreca. Dici che son prodezze? Fai un risetto, letterina greca!*

Da (http://utenti.quipo.it/base5/numeri/pigreco.htm)

Un giochino divertente sulle cifre decimali di π si trova:

http://www.museoscienza.org/eureka/approfondimenti.asp#

Che cosa è un cerchio?

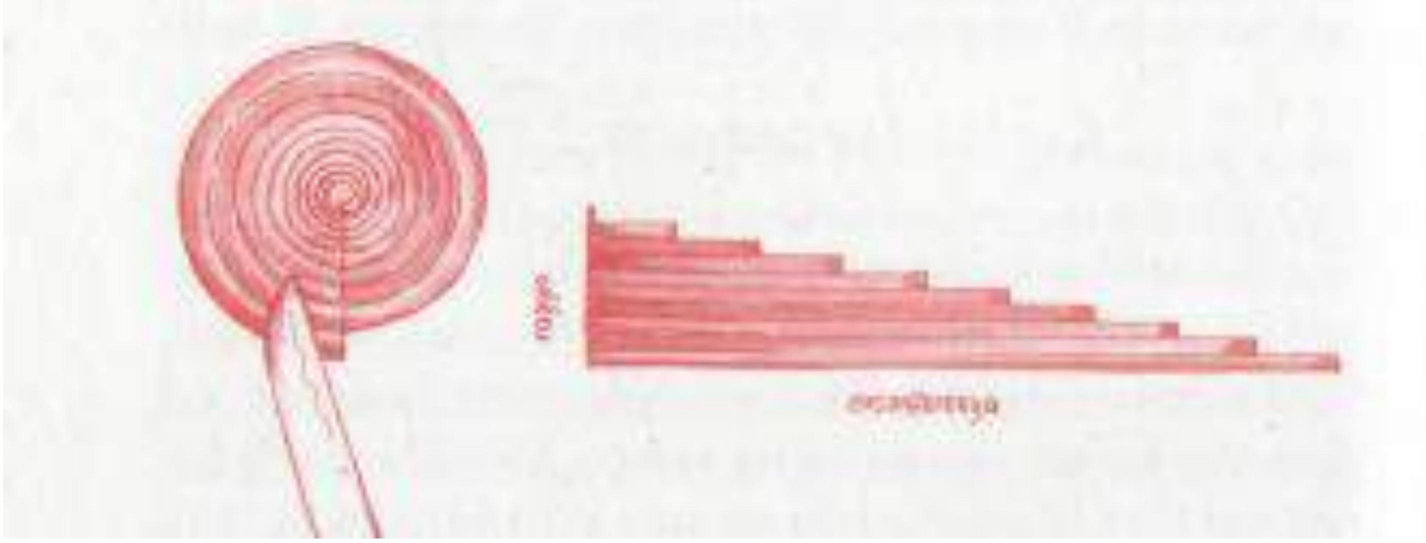
Un cerchio è formato da una circonferenza e dalla sua parte interna.

In termini matematici si può definire come una figura piana i cui punti godono della seguente proprietà:

la distanza da un punto fisso (il centro) è minore o uguale ad una distanza nota (il raggio)

Come si calcola l'area di un cerchio?

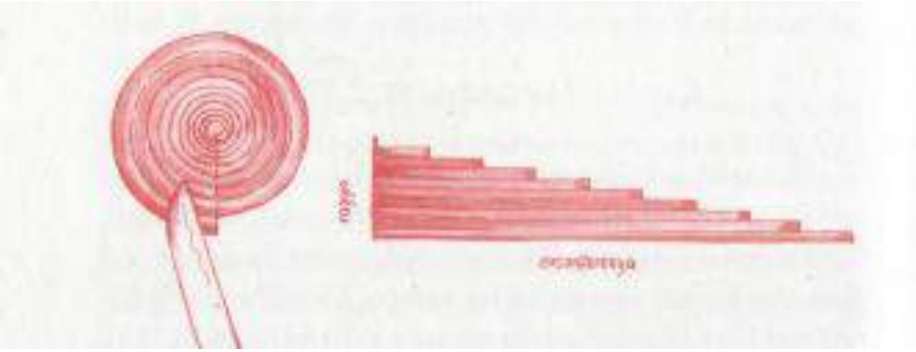
Immaginiamo di considerare una rondella di liquirizia (quasi un cerchio) e di tagliarla lungo un raggio: otteniamo tanti segmenti di liquirizia che possiamo disporre come in figura. Il segmento più lungo corrisponde alla **circonferenza rettificata,** base di un «triangolo» di altezza pari al raggio.



Come si calcola l'area di un cerchio?

L'area del cerchio sarà allora uguale all'area del triangolo che ha per base la circonferenza rettificata e per altezza il raggio, cioè

$$A = \frac{C \cdot r}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \frac{\cancel{2}\pi r \cdot r}{\cancel{2}} = \boldsymbol{\pi r^2}$$



Quanti punti (come minimo) servono per individuare un piano?

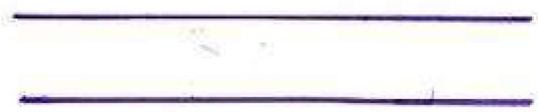
Un piano passa per tre punti, ma bastano anche

- Una retta e un punto
- Una circonferenza o un triangolo
- ……..

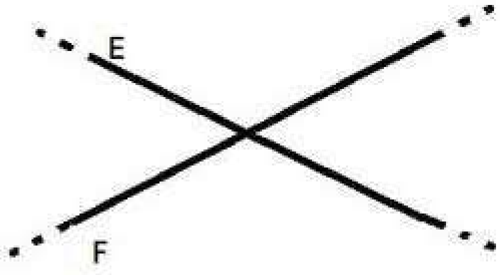
Rette nel piano …

Quali sono le posizioni reciproche di due rette nel piano?

Rette parallele



Rette incidenti

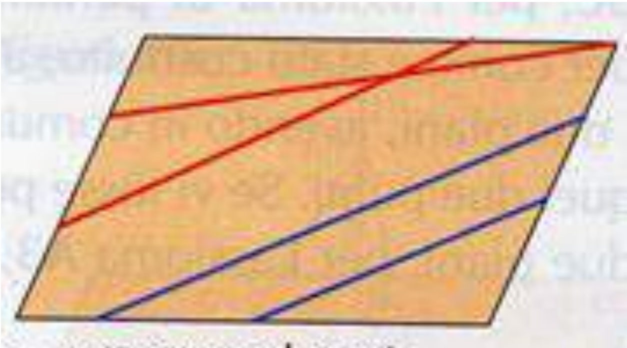


… e rette nello spazio

Rette complanari:

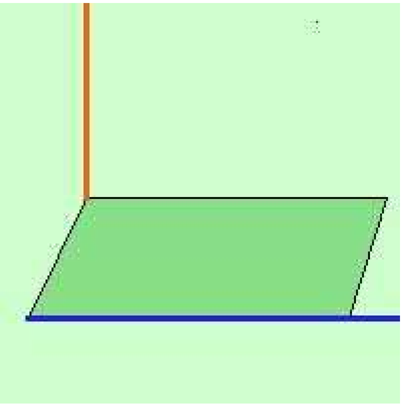
Rette parallele: rette che coincidono oppure che giacciono su uno stesso piano e non hanno punti in comune

Rette incidenti: rette che hanno un punto comune



a. rette complanari

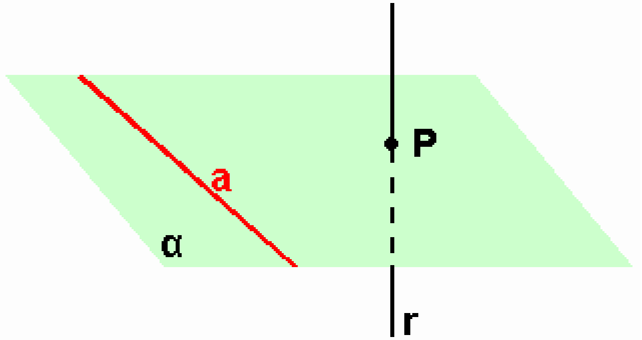
… e rette nello spazio



Rette sghembe

Come esempio guarda la tua stanza: considera come prima retta la linea fra una parete ed il pavimento, considera poi la parete opposta e prendi una linea verticale su di essa: le due rette sono sghembe, cioe' non puoi pensare nessun piano che contenga entrambe le rette; in figura la retta rossa e la retta blu sono

tra loro sghembe



Rette e piani nello spazio

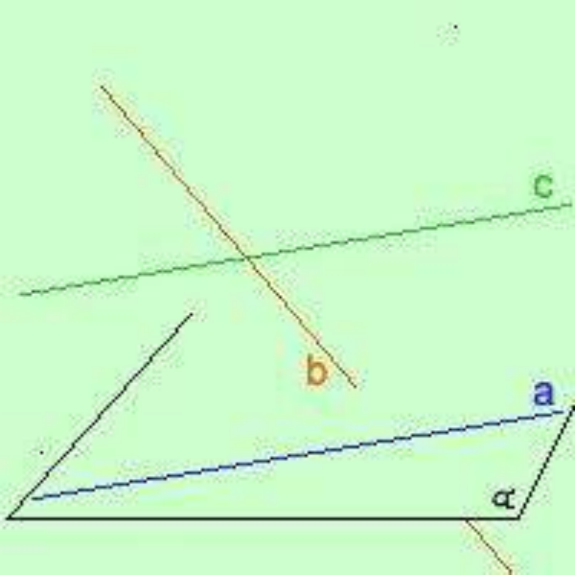
Una retta nello spazio rispetto ad un piano può essere:

secante: in tal caso ha un solo punto in comune con il piano

parallela ad una retta del piano: in tal caso non ha nessun punto in comune con il piano

Giacente sul piano: in tal caso ha tutti i punti in comune con il piano

la retta **a** giace sul piano
la retta **b** e' secante il piano
la retta **c** e' sopra il piano e
parallela alla retta a

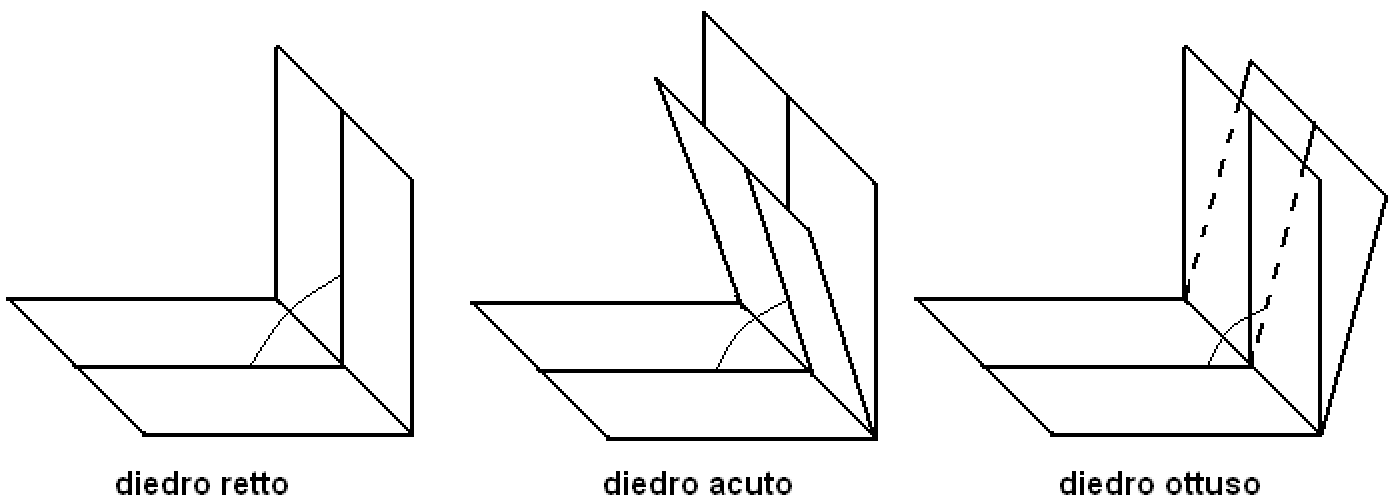


Angoli nello spazio

La nozione di *angolo solido* costituisce un'estensione del concetto di angolo nel piano.

L'angolo definito nel piano è *una delle due regioni delimitate da due semirette aventi la stessa origine.*

La prima situazione, più immediata, è quella di sostituire alle due semirette uscenti dallo stesso punto due semipiani uscenti da una stessa Retta (**angolo diedro**)

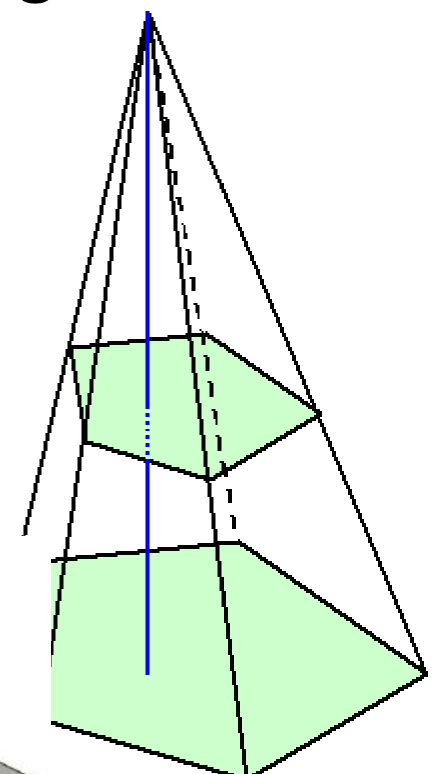


Angoli nello spazio

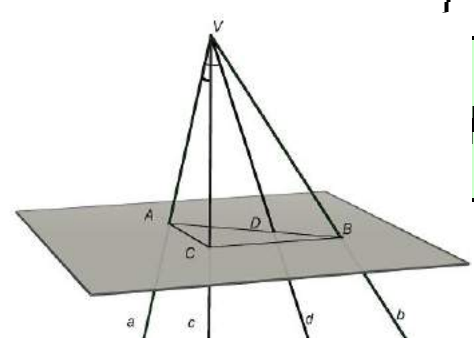
La nozione di angolo diedro, pur essendo la più diffusa, non esaurisce però tutte le situazioni geometriche in cui nello spazio si individua una regione che è analoga all'angolo definito nel piano. La stessa natura ci presenta moltissime forme poliedriche, in cui non sono solo due piani uscenti da una stessa retta, ma più superfici piane uscenti da un medesimo punto a delimitare una regione solida

A tale scopo è necessaria la nozione di **angoloide**, per il quale la definizione ha un approccio decisamente costruttivo: si conducono da un punto esterno ad un poligono convesso semirette che incontrino i punti del contorno di tale poligono: esse

individuano a due a due parti di superfici piane, che delimitano, internamente ed esternamente, due regioni dello spazio: quella interna è detta **angoloide.**

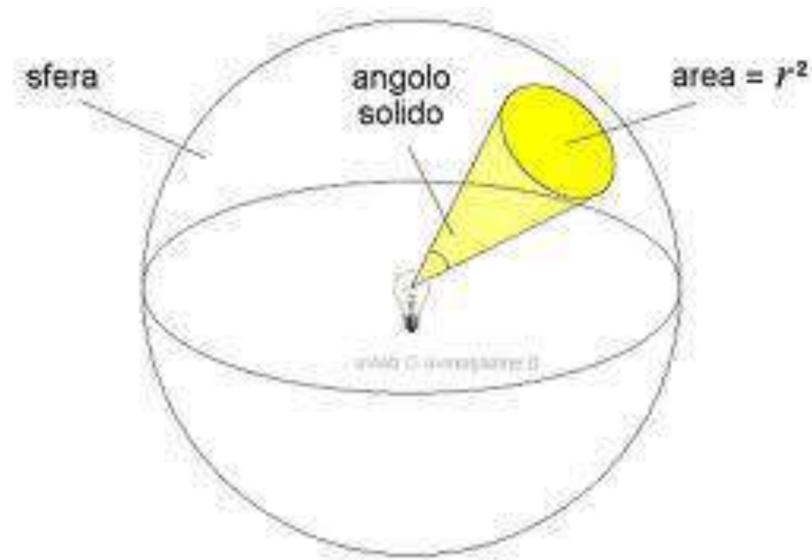


Un angoloide con tre spigoli si dice **triedro.**



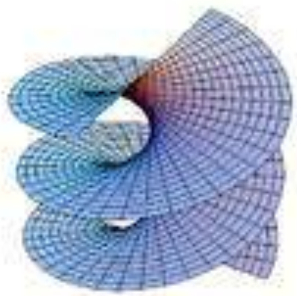
Si perviene così alla nozione di **angolo solido**, che costituisce la maggiore generalizzazione di questo concetto nello spazio: l'angolo solido è delimitato da rette che sono le generatrici di un cono nello spazio.

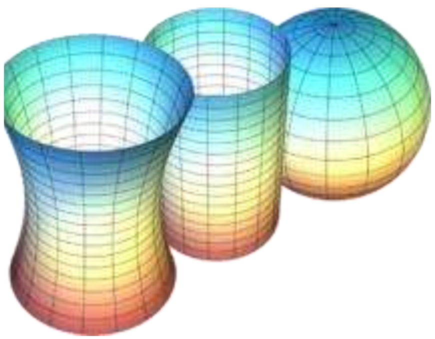
La sua sezione con un piano non passante per il vertice dell'angolo solido è una figura chiusa di contorno curvilineo.



Le superfici

Una **superficie** è una forma geometrica senza spessore, *avente solo due dimensioni*. Una superficie può essere piatta (come un piano) o curva (come il bordo di una sfera o di un cilindro). Può essere limitata o illimitata, chiusa o aperta. Una superficie ha due facce. **Può esistere una superficie con una sola faccia?**

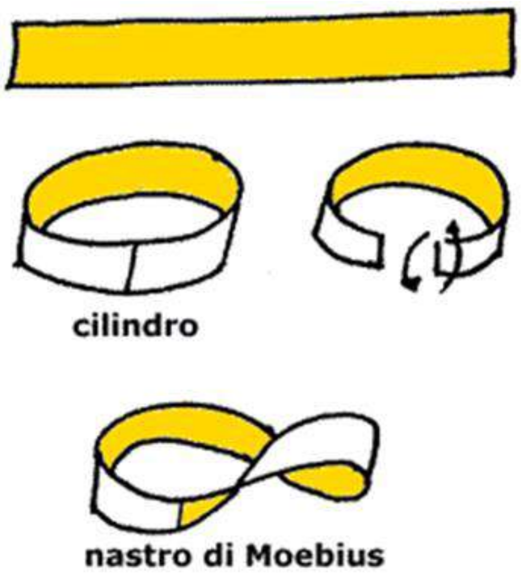




Il nastro di Moebius

dal sito
http://www.matematita.it/personali/index.php?blog=6&cat=77

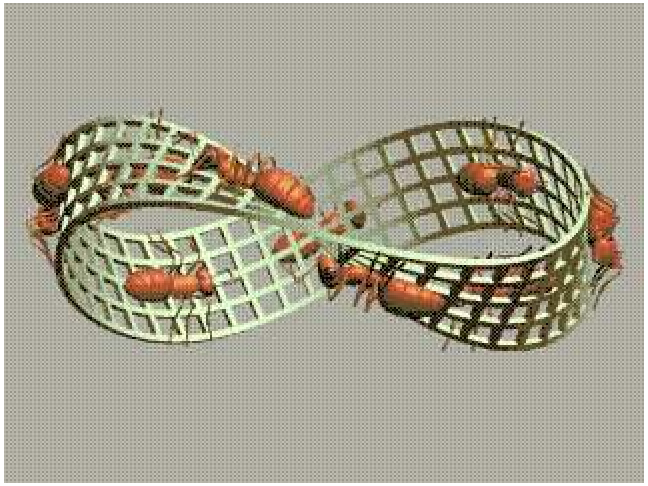
Ottenere un nastro di Moebius è molto semplice: basta prendere un rettangolo di carta, che sia abbastanza lungo e stretto (un rapporto conveniente fra i due lati può essere di 1:5), e incollarne insieme i lati corti dopo aver dato al rettangolo una mezza torsione.



Il risultato è un oggetto molto semplice, che per molti versi assomiglia a un cilindro, e però è molto diverso da un cilindro.

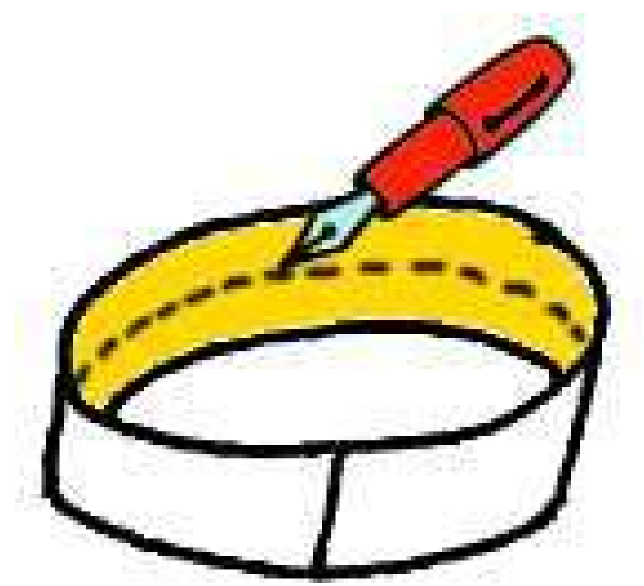
Per cominciare, si può osservare che il bordo del cilindro è costituito da due circonferenze, mentre è facile rendersi conto (seguendolo con un dito, o meglio con una matita colorata) che il bordo del nastro di Moebius è costituito da una sola circonferenza. Un'altra caratteristica del nastro di Moebius è quella di essere una superficie "non orientabile"; se si immagina, come in questa animazione,

di viaggiare sopra un nastro di Moebius, dopo aver fatto un giro completo ... ci si ritrova dall'altra parte.

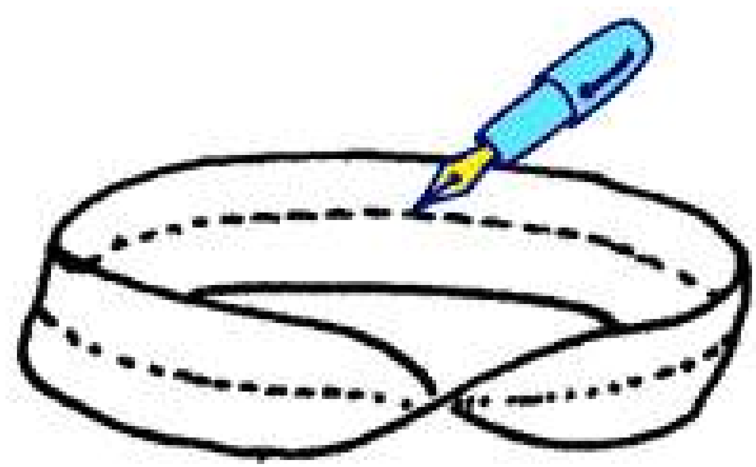


Il nastro di Moebius è una superficie che ha una sola faccia. Per capire questa sua singolare proprietà si può metterlo a confronto con una superficie cilindrica. **La superficie cilindrica ha due facce: quella esterna e quella interna**.

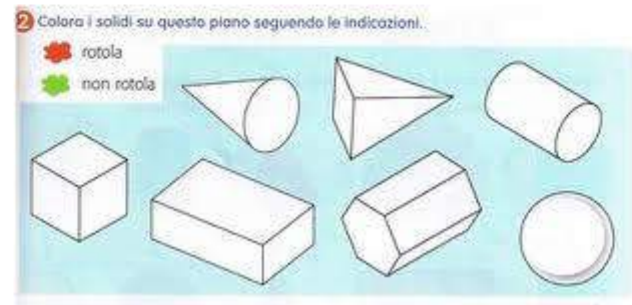
Se tracciate una linea continua lungo tutta la faccia interna di un cilindro, vi ritroverete al punto di partenza dopo aver descritto una linea chiusa che giace interamente sulla faccia interna del cilindro.

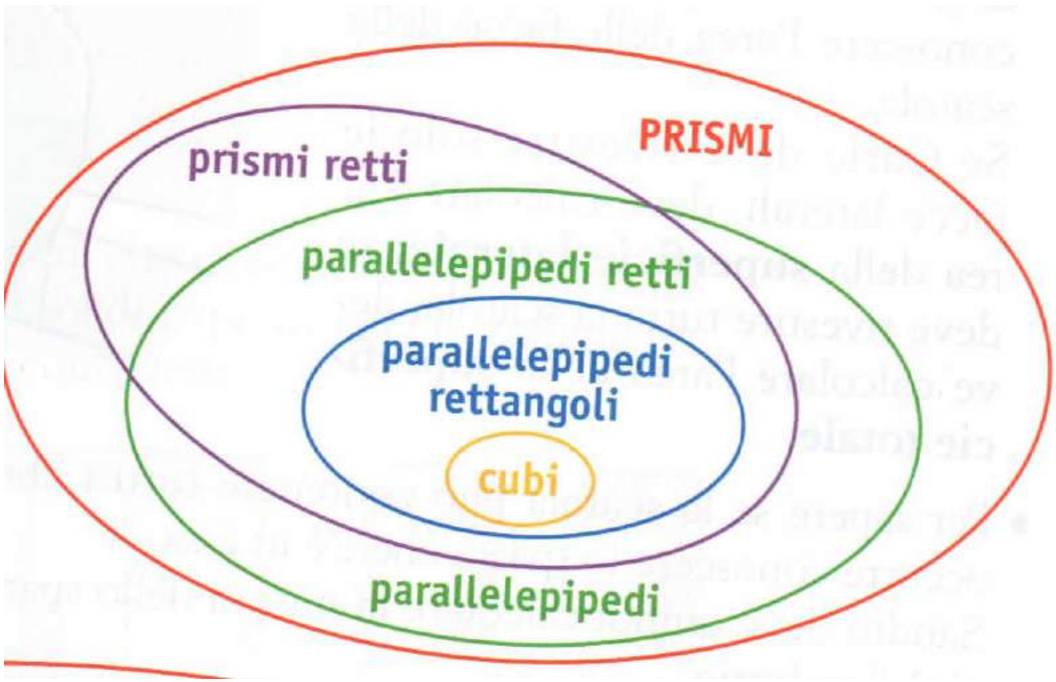


Se invece tracciate una linea continua lungo tutto l'anello di Moebius, anche in questo caso tornerete al punto di partenza, ma se aprite l'anello vedrete con grande sorpresa che la penna ha percorso interamente entrambe le facce della striscia di carta. La conclusione matematica è che l'anello di Moebius non ha due facce, bensì una sola!



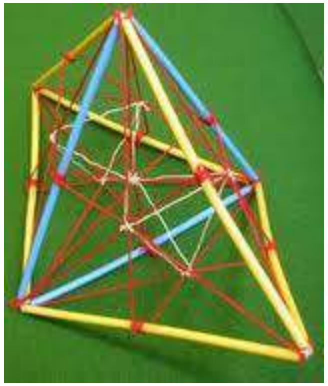
I solidi geometrici

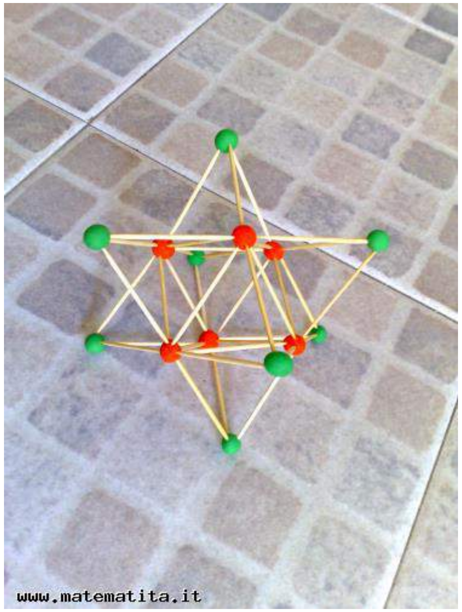


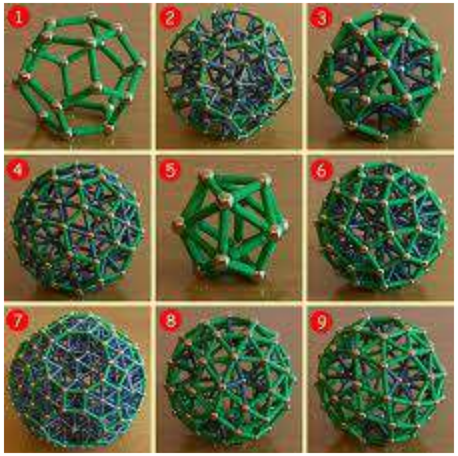


Costruzione dei solidi

I solidi si possono costruire sia con cartoncino Bristol leggero, ma anche con cannucce da bibita o con Geomag. L'uso del cartoncino svela la natura del solido (sviluppo); l'uso di cannucce rivela meglio gli aspetti metrici e topologici







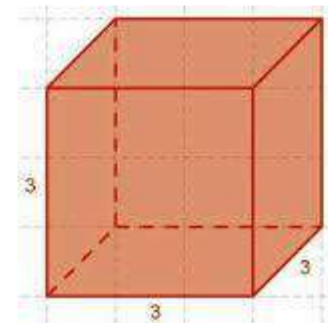
Costruendo modellini ci si può rendere conto concretamente di alcune proprietà delle figure geometriche che - se sono studiate solo sui libri - qualche volta non vengono comprese appieno: ad esempio, date tre cannucce, possiamo sempre costruire un triangolo? Se una delle tre è più lunga della "somma" delle altre due, si vede facilmente che per quanto si variino gli angoli, non c'è modo di "chiudere" il triangolo. Se invece ogni cannuccia è più corta della "somma" delle altre due, il triangolo si può costruire. Anzi, se ne può costruire uno solo: non c’è possibilità di scelta sugli angoli; il triangolo è univocamente determinato dai suoi lati, è rigido.

L'analoga affermazione non è vera per i poligoni con più di tre lati: per costruire un quadrato non basta unire quattro cannucce della stessa lunghezza, dobbiamo anche – con qualche accorgimento - fissare gli angoli in modo che risultino retti, altrimenti con quelle stesse quattro cannucce avremo così semplicemente un rombo (e "quanti" rombi si possono costruire con lato assegnato?).
Dunque non ci stupiamo più che la costruzione di un cubo con le cannucce richieda maggiore attenzione della costruzione di un tetraedro, o di un ottaedro (¼ e dunque neppure del fatto che strutture come le gru, i tralicci ecc. vengano triangolate).
Anzi, abbiamo capito che, per ottenere modelli rigidi di cubi o di altri poliedri in cui le facce non siano tutte triangolari, un altro sistema (con i suoi pro e i suoi contro) è usare il cartoncino, costruendo così non solo il contorno di ogni faccia, ma le facce intere.

Il cubo

Se abbiamo un cubo di lato *l*, come possiamo esprimere il suo volume?

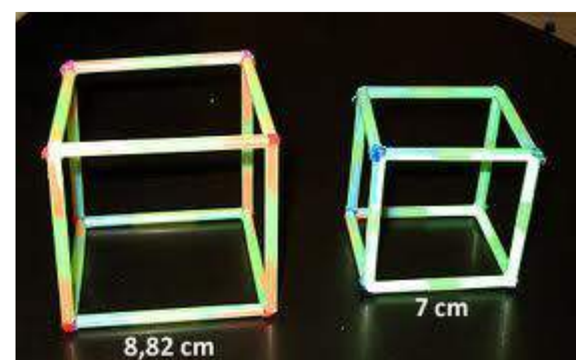
Calcoliamo l'area del quadrato di base



$$A = l \times l = l^2$$

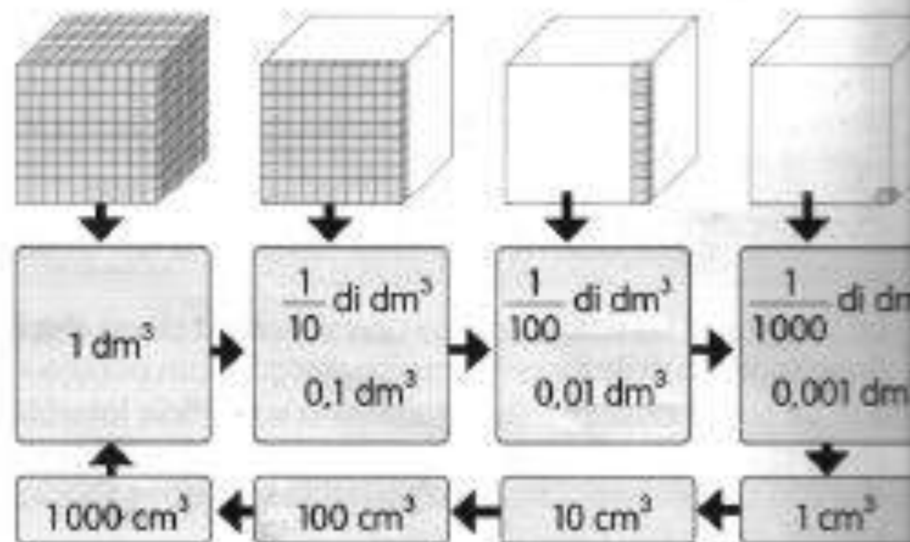
Moltiplichiamo l'area di base per l'altezza, che è sempre pari a *L*

$$V = l \times l \times l = l^3$$



Misure di volume

Per misurare il volume di un solido, le unità di misura più usate sono il **m³**, il **dm³** e il **cm³**, che corrispondono a cubi con gli spigoli lunghi rispettivamente **1 m**, **1 dm** e **1 cm**.



Equivalenze...

In un decimetro ci stanno dieci centimetri.
1 dm = 10 cm

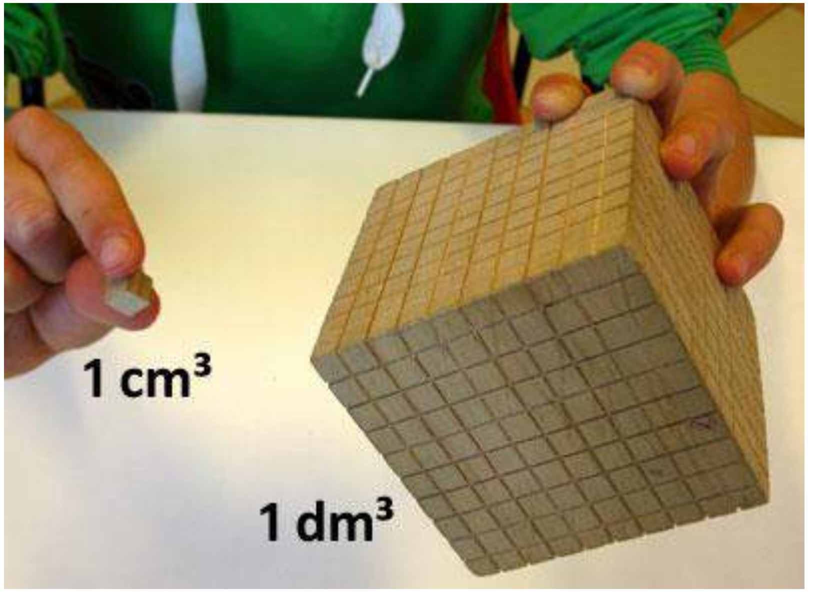
In un decimetro quadrato ci stanno cento centimetri quadrati.
1 dm^2 = 100 cm^2

In un decimetro cubo ci stanno mille centimetri cubi.
1 dm^3 = 1000 cm^3

Facile a dirsi, difficile a credersi, soprattutto l'ultima delle tre.

Allora guardiamolo con gli occhi e tocchiamolo con le mani.

Si vede e si sente chiaramente che il cm^3 è davvero un nano rispetto al dm^3.



http://utenti.quipo.it/base5/geosolid/dm3cm3.htm

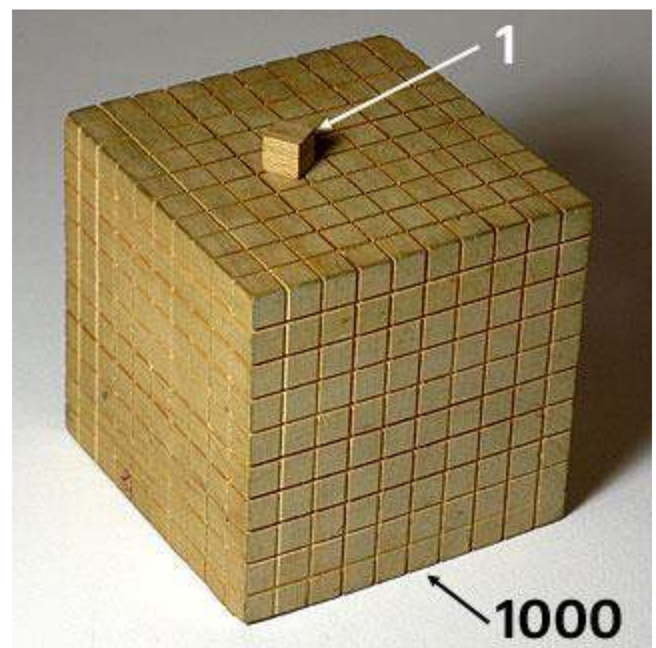
Inoltre, con un semplice calcolo, si scopre che per costruire un decimetro cubo servono 1000 cm^3.

Infatti bisogna dapprima costruire un piano di 10x10 = 100 cubetti da 1 cm^3.

Poi bisogna aggiungere alla costruzione altri 9 piani uguali al primo.

In tutto fanno 10 piani di 100 cubetti ciascuno, ovvero 1000 cubetti.

http://utenti.quipo.it/base5/geosolid/dm3cm3.htm



Questo stesso rapporto 1:1000 vale per ogni salto da una unità di volume a quella successiva:

1 cm^3 = 1000 mm^3

1 dm^3 = 1000 cm^3

1 m^3 = 1000 dm^3

1 dam^3 = 1000 m^3

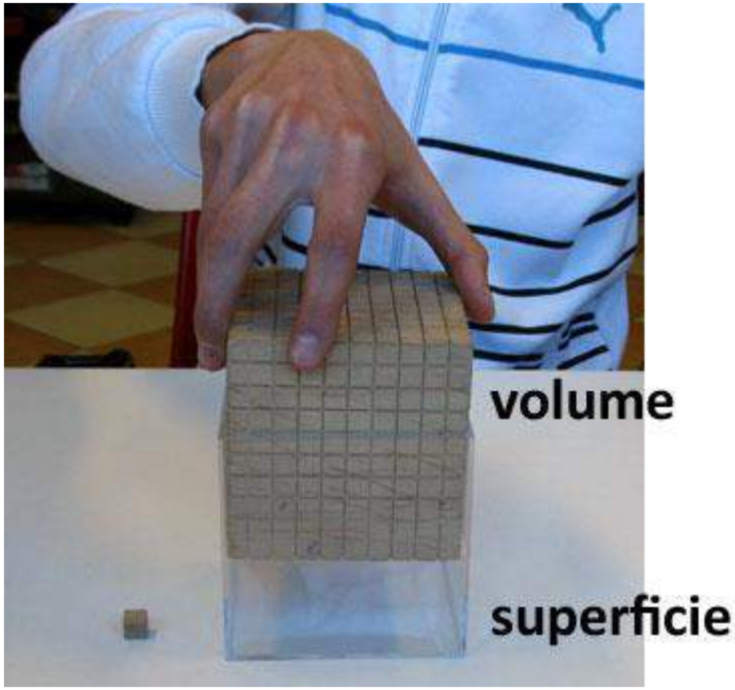
... e così via.

Litri e decimetri cubi

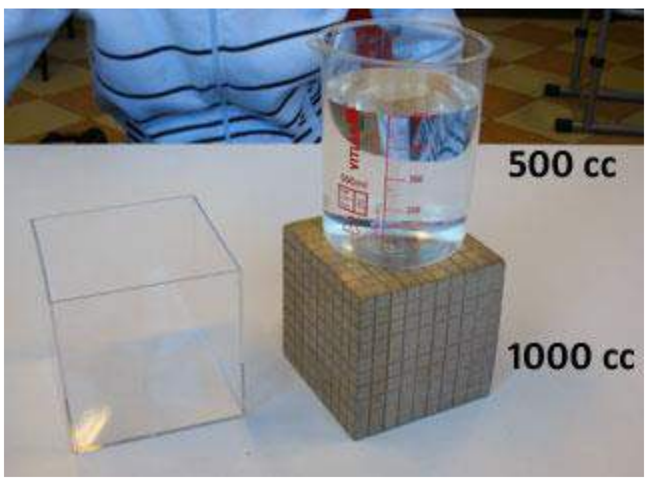
Procuriamoci un contenitore cubico le cui misure interne siano 10x10x10 cm.

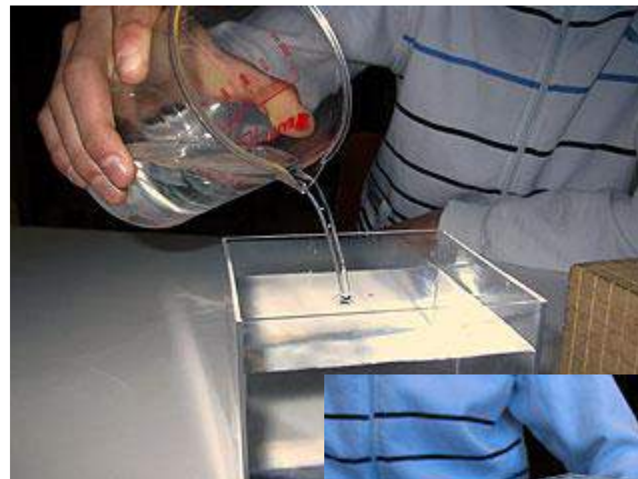
Il suo volume interno è 1 dm^3.

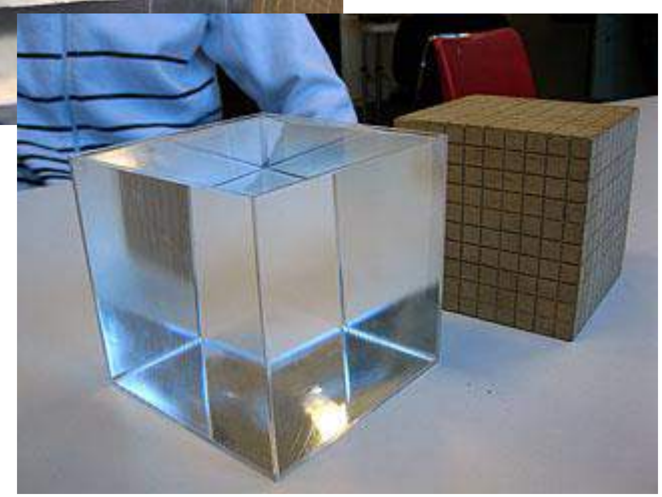
http://utenti.quipo.it/base5/geosolid/dm3cm3.htm



Strano ma vero: per riempirlo fino all'orlo occorre esattamente un litro d'acqua. Nel nostro caso abbiamo versato due bicchieri da mezzo litro.







http://utenti.quipo.it/base5/geosolid/dm3cm3.htm

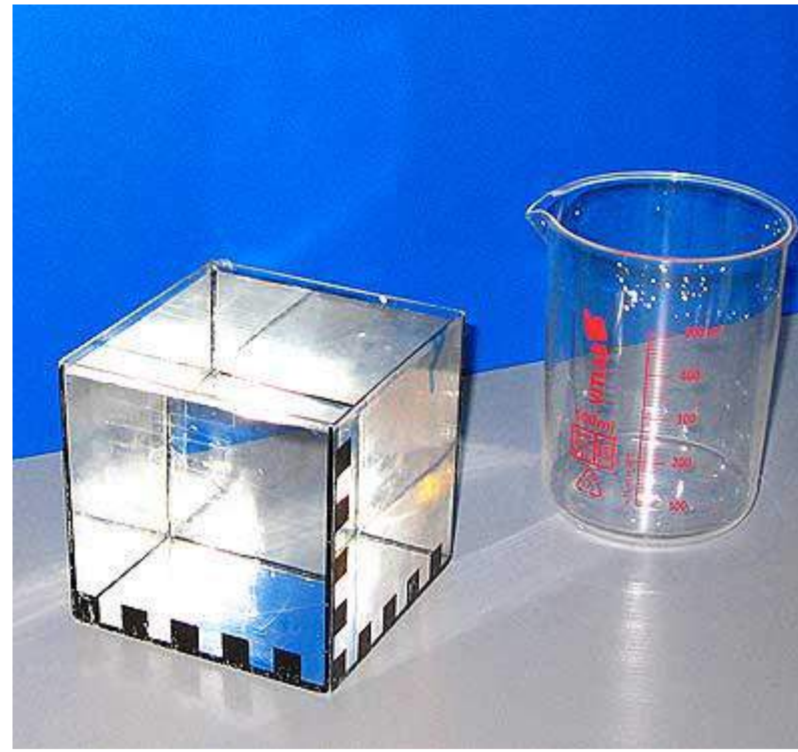
Il decimetro cubo è un cubo che ha lo spigolo lungo 1 dm, ovvero 10 cm.
Ma che cosa succede se la misura non è esattamente quella giusta?

Facciamo una prova assolutamente classica: prendiamo un contenitore cubico (di quelli didattici), di lato 10 cm (1 decimetro).

Per definizione dovrebbe contenere esattamente un litro d'acqua.

Però, chissà perché, a tutti sembra troppo piccolo.

Allora, facciamo una prova: riempiamolo con un litro d'acqua misurandolo con un cilindro graduato (di cui ci fidiamo).



Sorpresa!

Il cubo non è pieno fino in cima, ma mancano addirittura 30 cc d'acqua per riempirlo.

Perché?

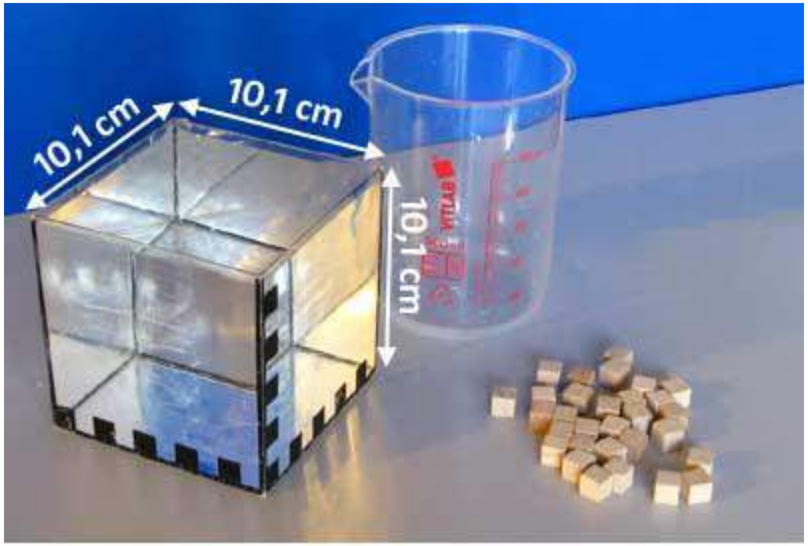
http://utenti.quipo.it/base5/geosolid/decimetrocubo.htm

In questo caso l'errore è nel cubo stesso: i suoi lati misurano 1 mm in più del dovuto.

Un millimetro sembra poco (1%) ma si traduce in un errore notevole sul volume.

Infatti $10{,}1^3$ = **1030,30 (circa)**

http://utenti.quipo.it/base5/geosolid/decimetrocubo.htm



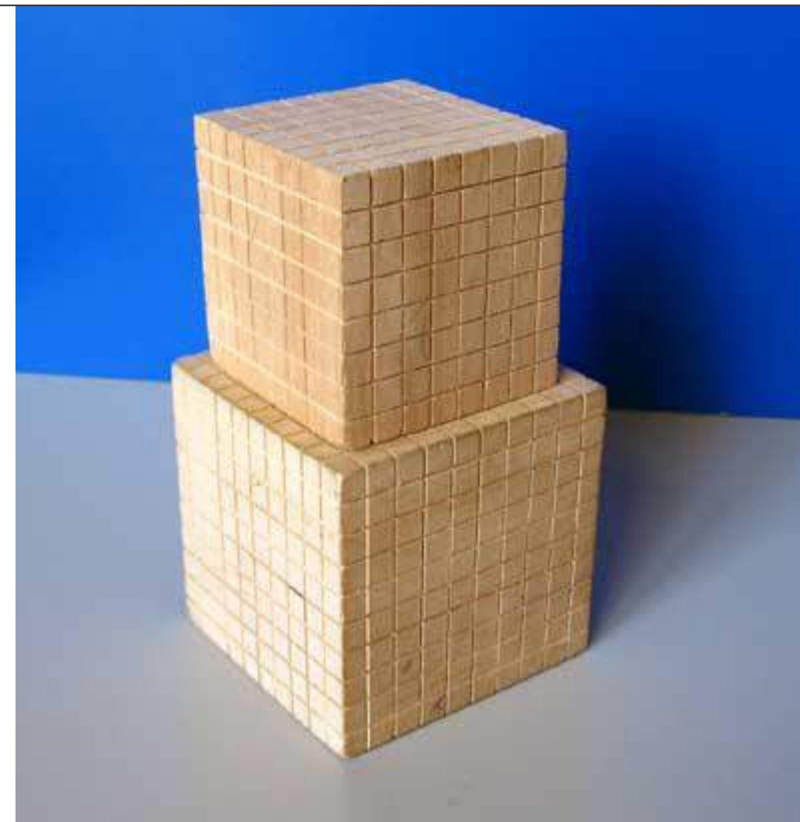
$10{,}1^3$ - 30 = 1 litro

La variazione del volume in funzione del lato è ancora più incredibile nel caso seguente.

I due cubi sovrapposti che vedete nella foto qui sotto hanno misure leggermente diverse: il lato del cubo grande è **10 cm**, mentre il lato dell'altro cubo è **8 cm**. La differenza è soltanto il 20% del lato più grande.

Tuttavia, se parliamo di volumi, il cubo più piccolo è circa **la metà** di quello più grande.

http://utenti.quipo.it/base5/geosolid/decimetrocubo.htm



Infatti:

$$10^3 = 1000$$

$$8^3 = 512$$

In conclusione

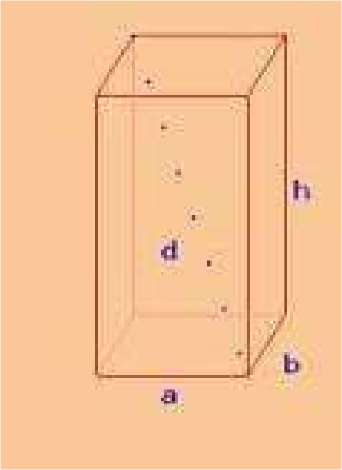
Il volume del cubo varia col cubo del lato.

Se il lato raddoppia, il volume ottuplica.

Se il lato diminuisce del 20%, il volume dimezza (all'incirca).

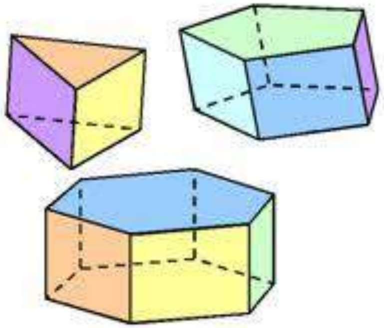
Parallelepipedo e prisma

Volume del parallelepipedo



Area di base $\times$ altezza= $a \times b \times h$

Volume del prisma retto



Area di base $\times$ altezza

Volume del cilindro

http://utenti.quipo.it/base5/geosolid/volcilindro.htm

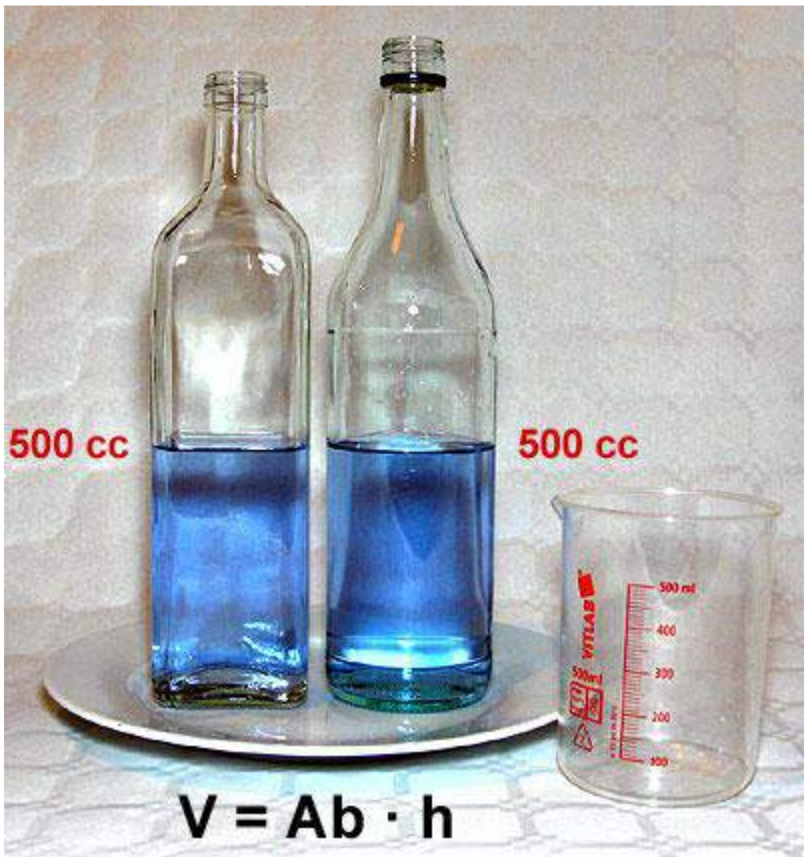
Bisogna prima di tutto cercare due bottiglie della stessa capacità (per esempio un litro), la prima a forma di parallelepipedo rettangolo con la base quadrata e la seconda a forma di cilindro.

Ma non basta: versando nelle bottiglie la stessa quantita di liquido, il liquido **deve** raggiungere lo stesso livello in entrambe le bottiglie.

Prepariamo inoltre poco più di un litro di acqua colorata con inchiostro blu.

Versiamo 500 cc di acqua colorata nella prima bottiglia

Versiamo 500 cc di acqua colorata nella seconda bottiglia



L'acqua raggiunge lo stesso livello in entrambe le bottiglie (ovvio: le abbiamo scelte proprio con questa proprietà!)

Che cosa hanno in comune questi due volumi d'acqua nelle bottiglie?

lo stesso volume;

la stessa altezza;

la stessa area di base! (si scopre facendo qualche misurazione e qualche calcolo).

Dunque, la formula per calcolare il volume del cilindro è praticamente uguale a quella del parallelepipedo rettangolo a base quadrata!

Potremmo persino azzardare che la formula è uguale per tutti i solidi "*retti*" indipendentemente dalla *forma* della base.

Ma cosa vuol dire *solido retto*, in questo contesto? Beh, questa è un'altra storia...

In conclusione, la formula

Volume del parallelepipedo rettangolo = Area di base · altezza

$V_{parallelepipedo} = Ab \cdot h$

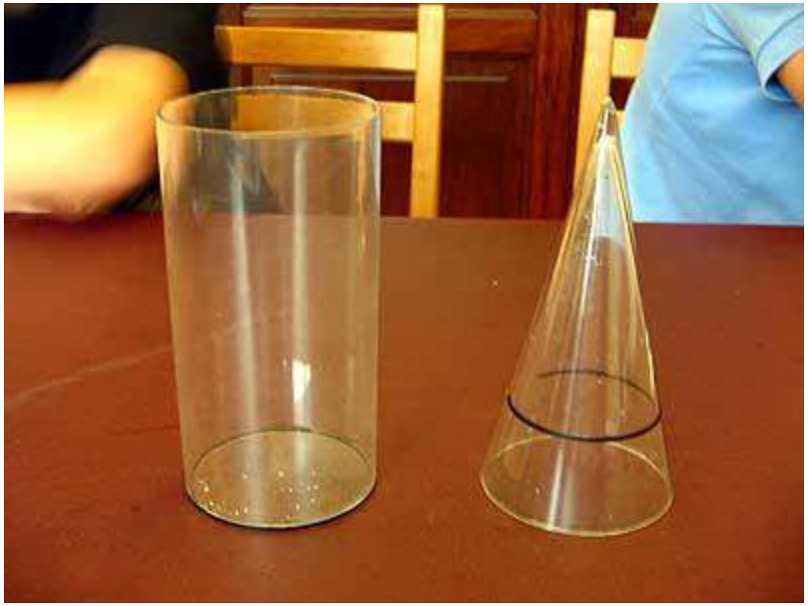
$V_{cilindro} = Ab \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Il volume del cono

http://utenti·quipo·it/base5/geosolid/volcono·htm

Prendiamo due recipienti a forma di cono e di cilindro. Il cono e il cilindro hanno lo stesso diametro e la stessa altezza.

Chiediamoci: quanti coni d'acqua servono per riempire il cilindro?



Riempiamo il cono d’acqua

Versiamo l’acqua del cono nel cilindro: 1° volta

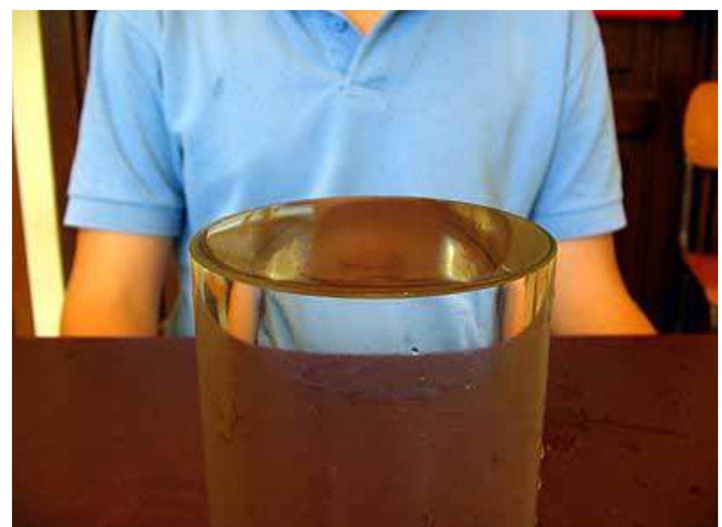
Osserviamo: è sicuramente meno della metà.

Misurando con un righello l'altezza dell'acqua possiamo ipotizzare che è 1/3 dell'altezza del cilindro.

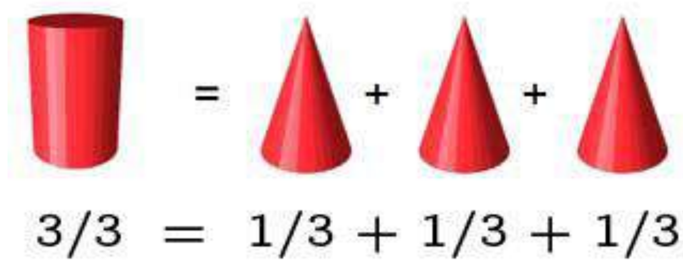
Riempiamo ancora il cono d'acqua e versiamo nel cilindro: 2° volta

Riempiamo nuovamente il cono d'acqua e versiamola nel cilindro: 3° volta.

Questa volta il cilindro è pieno. Perfettamente



Concludiamo che il volume di un cono è 1/3 del volume del cilindro che ha la stessa base e la stessa altezza del cono.

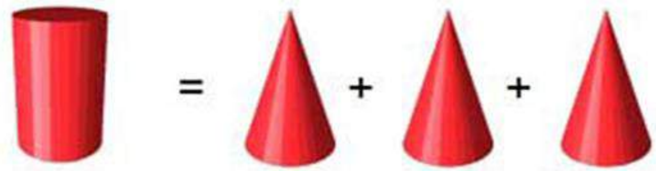


Come possiamo ricavare la formula del volume del cono?

prendiamo la formula del cilindro e la dividiamo per 3;

Così calcoleremo il volume di un cono avente lo stesso raggio e la stessa altezza del cilindro.

In formule: il volume del cono



3/3 = 1/3 + 1/3 + 1/3

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V_{\text{cono}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

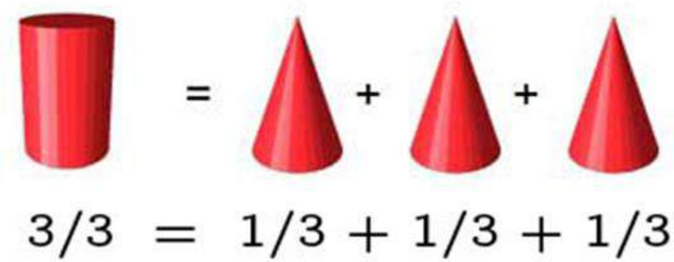
Il volume della sfera

http://utenti.quipo.it/base5/geosolid/volsfera.htm

Per capire questo esperimento bisogna:

- sapere che il volume del cilindro è triplo del volume del cono avente lo

stesso raggio e la stessa altezza del cilindro;



- conoscere le formule per il calcolo dei volumi del cilindro e del cono

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V_{\text{cono}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

Prendiamo tre recipienti a forma di cono, sfera, cilindro.

Tutti e tre hanno lo stesso diametro.

Inoltre il cono e il cilindro sono equilateri, cioè hanno il diametro uguale all'altezza.

Inseriamo la sfera nel cilindro

Iniziamo a versare acqua nel cilindro

Continuiamo a versare acqua fino a quando il suo livello raggiunge il bordo del cilindro.

Bisogna premere la sfera verso il basso facendo attenzione che non vi entri dell'acqua attraverso il foro.

Estraiamo la sfera dal cilindro, facendola sgocciolare per bene.

Il volume della sfera, in rapporto al volume del cilindro corrisponde alla parte del cilindro stesso rimasta vuota.

Ma quanta acqua si trova nel cilindro?

Per capirlo, versiamo l'acqua nel cono equilatero che ha lo stesso diametro del cilindro

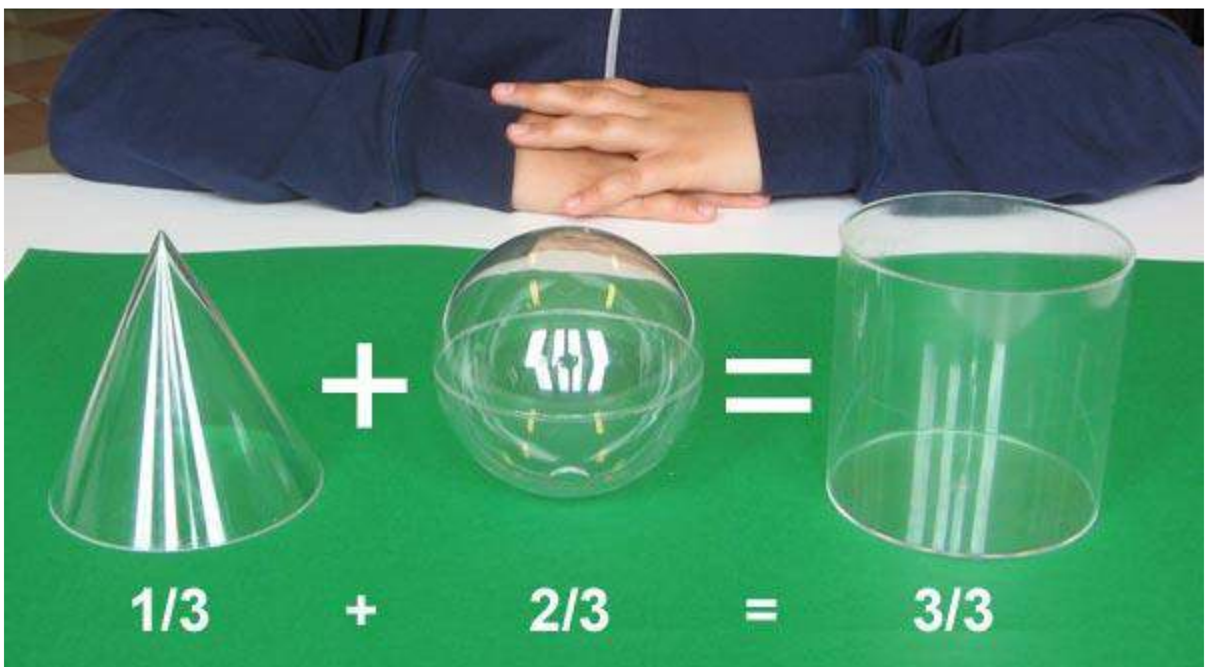
L'acqua riempie il cono esattamente fino all'orlo.

Cosa possiamo concludere?

Possiamo concludere che il cono più la sfera danno il volume del cilindro.

Ma siccome sappiamo che il cono è equivalente a 1/3 del cilindro, possiamo dedurre che:

- **il volume della sfera è 2/3 del volume del cilindro;**
- **il volume della sfera è doppio del volume del cono.**



Come possiamo ricavare la formula del volume della sfera?

prendiamo la formula del cilindro equilatero e la moltiplichiamo per 2/3;

$$V_{\text{cil}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V_{\text{cil equilatero}} = \pi \cdot r^2 \cdot 2 \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot r^3$$

$$V_{\text{sfera}} = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$V_{\text{sfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Come possiamo ricavare la formula del volume della sfera?

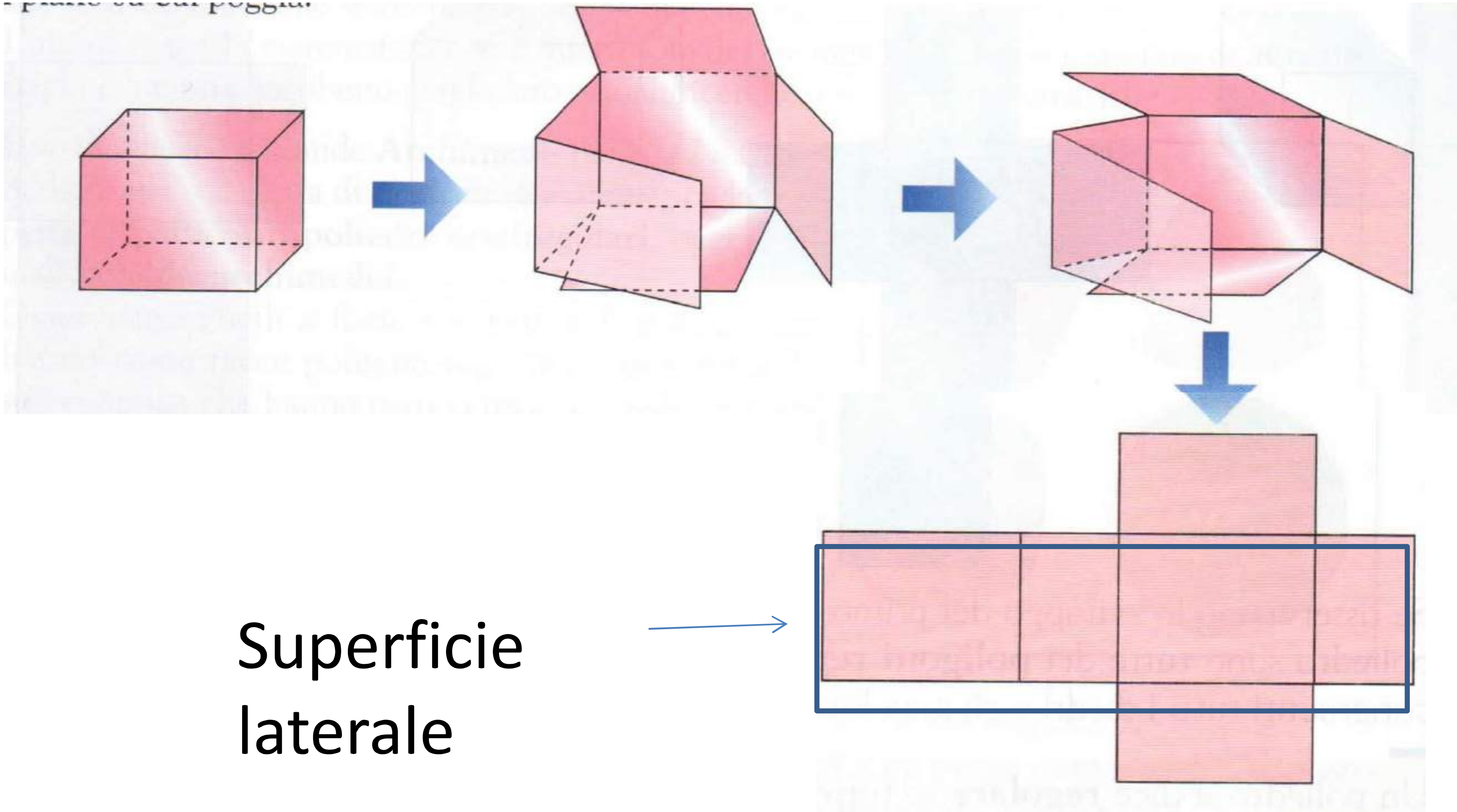
…. oppure prendiamo la formula del cono equilatero e la moltiplichiamo per 2.

NOTA BENE: Queste slide offrono una **sintesi** di alcuni temi trattati a lezione (peraltro secondo un approccio lievemente diverso). Vengono messe a disposizione degli studenti come supporto allo studio, ma non sostituiscono in nessun modo i testi indicati in bibliografia

Geometria solida 2

Veronica Gavagna

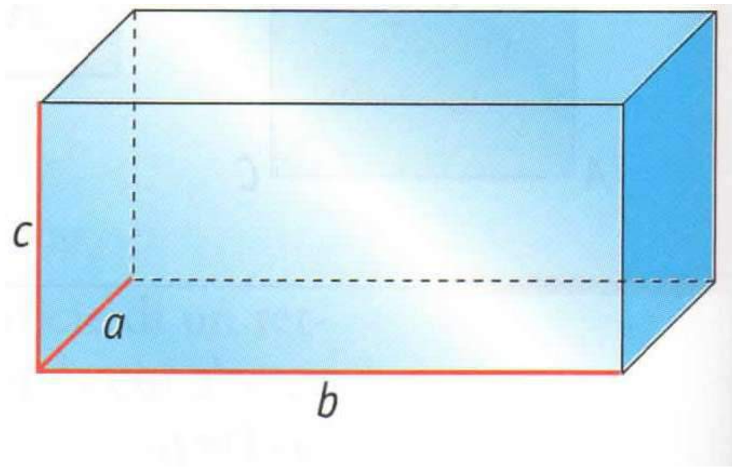
Lo sviluppo del parallelepipedo



Superficie
laterale

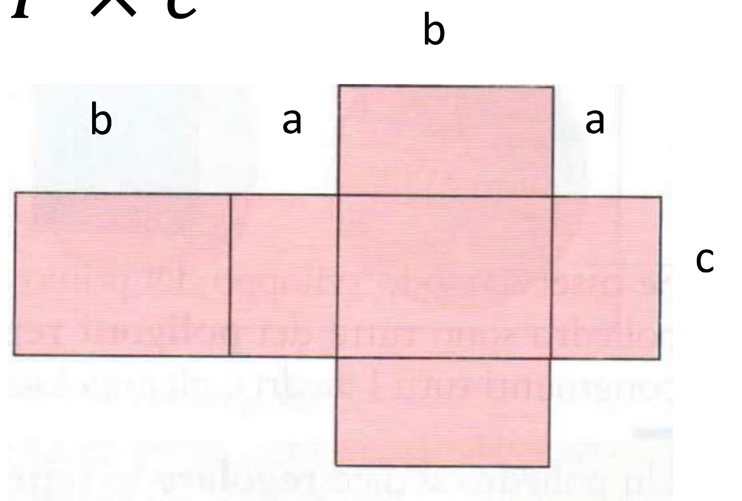
Area laterale e area totale

Dato il parallelepipedo



Area laterale

$$A_l = (a + b + a + b) \times c = P \times c$$

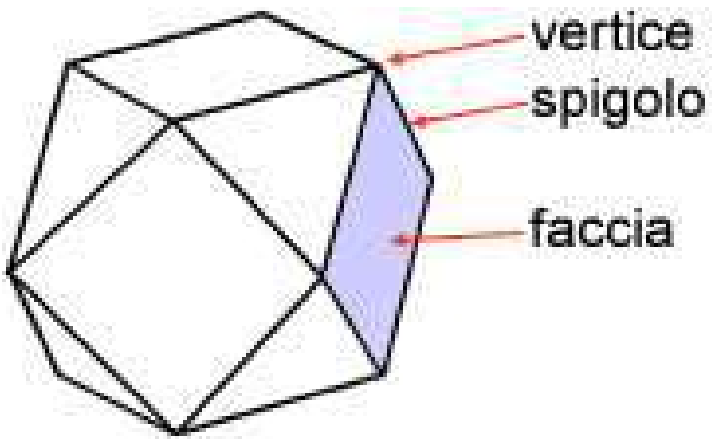


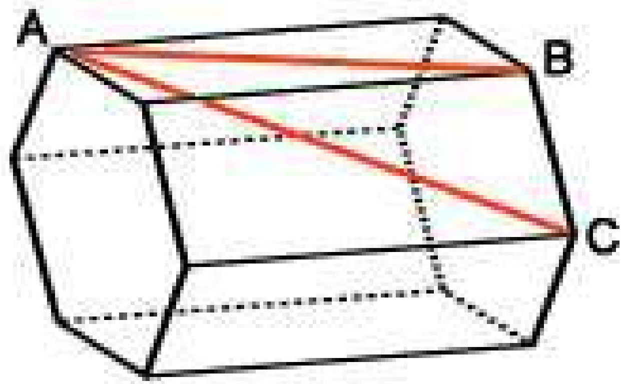
Area totale

$$A_t = P \times c + 2a \times b$$

Diagonale di un poliedro

La diagonale di un poliedro è un segmento che congiunge due vertici non appartenenti ad uno stesso spigolo.

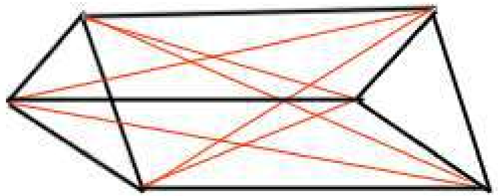




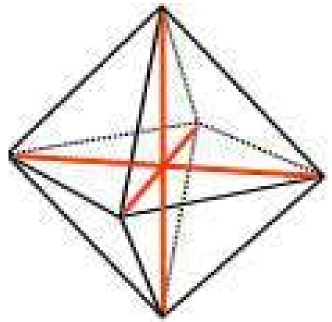
AB e AC sono diagonali del poliedro. In particolare AB è una diagonale di una faccia mentre AC è una diagonale interna

Quante sono le diagonali di un poliedro?

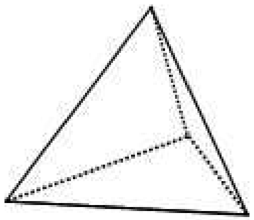
In un prisma triangolare ci sono 6 diagonali



In un ottaedro ci sono 3 diagonali



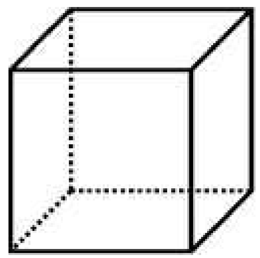
In un tetraedro non ci sono diagonali



Se **v** è il numero di vertici di un poliedro, e **s** è il numero di spigoli, il numero delle diagonali sarà:

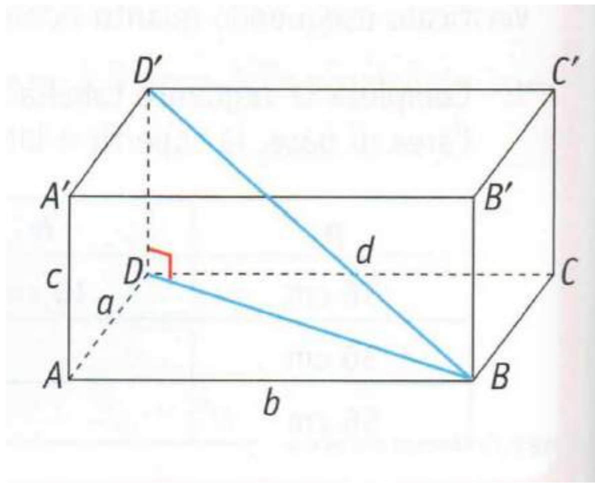
$$\frac{v(v-1)}{2} - s$$

Quante sono le diagonali di un cubo?



La misura di una diagonale interna del parallelepipedo

Dato il parallelepipedo di spigoli *a*, *b*, *c*, dobbiamo misurare il segmento BD’, cioè l’ipotenusa del triangolo rettangolo D’DB.



$$BD' = \sqrt{DD'^2 + DB^2} = \sqrt{c^2 + DB^2}$$

Come misuriamo il segmento DB (diagonale)?

DB è l’ipotenusa del triangolo rettangolo DAB

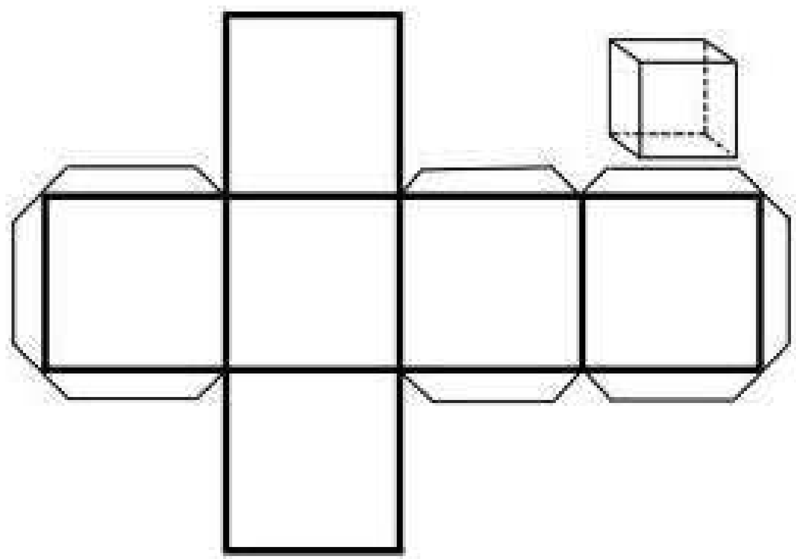
$$DB^2 = DA^2 + AB^2$$

$$BD' = \sqrt{DD'^2 + DA^2 + AB^2} = \sqrt{\boldsymbol{c^2 + a^2 + b^2}}$$

Sviluppo di un cubo: Area laterale e area totale

Area laterale

$$A_l = (a + a + a + a) \times a$$
$$= P \times a = 4a^2$$



Area totale

$$A_t = P \times a + 2a \times a =$$
$$= 4a^2 + 2a^2 = 6a^2$$

Sviluppo di un prisma retto: Area laterale e area totale

Il **prisma retto** è un solido che ha due basi uguali e parallele e una superficie laterale perpendicolare alle basi, costituita da facce rettangolari

Le due basi possono essere poligoni diversi: se sono triangoli, il prisma si chiama **prisma triangolare** e la sua superficie laterale ha 3 facce (quante sono i lati delle basi); se sono pentagoni, è un **prisma pentagonale** e la sua superficie laterale ha 5 facce; e così via.

Vogliamo costruire lo sviluppo del prisma triangolare retto rappresentato in figura 1

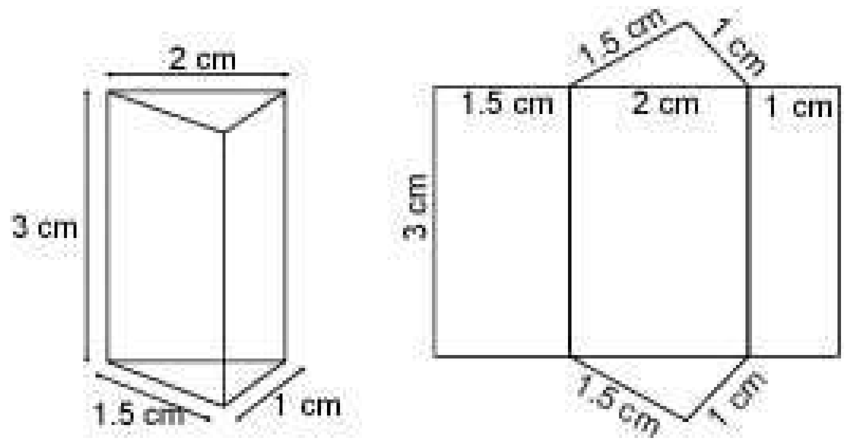


Figura 1

Le due basi del prisma sono triangolari e congruenti; i loro lati misurano rispettivamente 1 cm, 1,5 cm e 2 cm.
La superficie laterale comprende tre facce rettangolari che hanno la stessa base, uguale all'altezza del prisma: 3 cm.
Le altezze di queste facce sono rispettivamente uguali alle lunghezze dei lati della base: 1 cm, 1,5 cm e 2 cm.

L’area della superficie laterale di un prisma retto è la somma delle aree delle sue facce

Consideriamo il prisma della figura 1. La sua area laterale è uguale all’area del rettangolo grande formato dall’insieme delle tre facce laterali; questo misura 3 cm di altezza e 4,5 cm di base (1,5 + 2 + 1 = 4,5).

L’area laterale del nostro prisma retto sarà quindi uguale a 13,5 cm^2 (3 x 4,5 = 13,5) dove 4,5 è il perimetro di base.

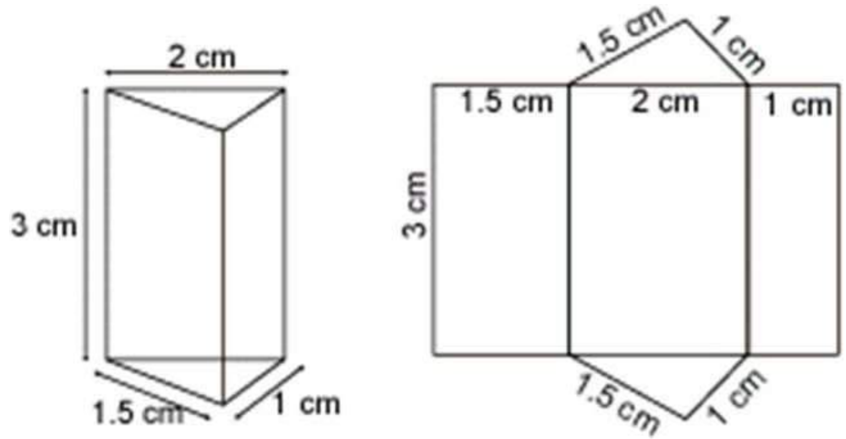


Figura 1

In generale

- L’area laterale A_l di un prisma retto, di altezza h e con le basi che hanno la lunghezza del perimetro uguale a P, è data dalla formula: $\boldsymbol{A_l = P \times h}$.

- Per applicare la formula, A_l, P e h devono essere espressi in unità di misura corrispondenti; ad esempio: A_l in cm^2, P in cm e h in cm.

Area totale

Una volta nota l'area A della superficie laterale, per trovare la superficie totale S basta sommare l'area delle due basi B.

Quindi, $\boldsymbol{A_t = A_l + 2B}$.

Il cilindro

Il cilindro è un **solido di rotazione**. Ciò significa che, idealmente, lo si può ottenere dalla rotazione di una figura piana intorno a uno dei suoi lati. In particolare, il cilindro retto si ottiene dalla rotazione di un rettangolo intorno a uno dei suoi lati.

Il cilindro retto ha per basi due cerchi uguali e paralleli, e per superficie laterale un rettangolo. Lo vediamo bene se costruiamo il cilindro con un foglio di cartoncino: si disegna il suo sviluppo sul foglio, poi lo si taglia e lo si piega.

Vogliamo costruire lo sviluppo del cilindro di rotazion rappresentato in figura 1.

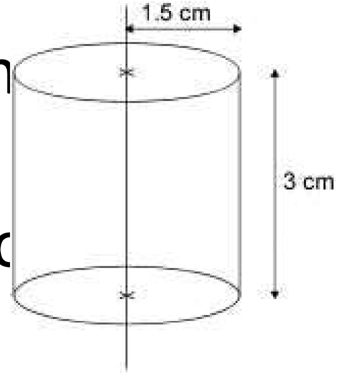


Figura 1

Le basi del cilindro sono due dischi di 1,5 cm di raggio ciascuno. Lo sviluppo della superficie laterale è rettangolare; i due lati del rettangolo sono uguali, rispettivamente, all'altezza del cilindro (3 cm) e alla circonferenza dei dischi di base.

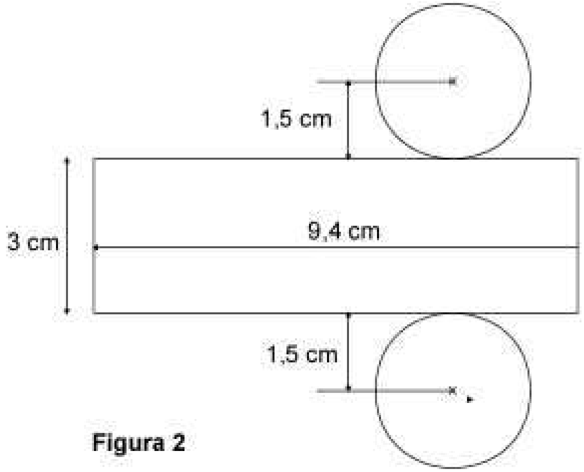


Figura 2

Per calcolare questo perimetro, cioè la lunghezza della circonferenza, applichiamo la formula

***P* = 2 *πR*,**

dove *R* è il raggio.

Otteniamo che $P = 2 \times 3{,}14 \times 1{,}5 = 9{,}42$.

La lunghezza della circonferenza di base è dunque uguale a circa 9,4 cm.

Area della superficie laterale

Lo sviluppo della superficie laterale di un cilindro è dunque una superficie rettangolare. L'area laterale di un cilindro è uguale all'area di questa superficie rettangolare. Nel caso in figura

l'area sarà quindi uguale a $3 \times 3\,\pi$ cm^2

cioè $9\,\pi$ cm^2, ovvero circa 28,27cm^2

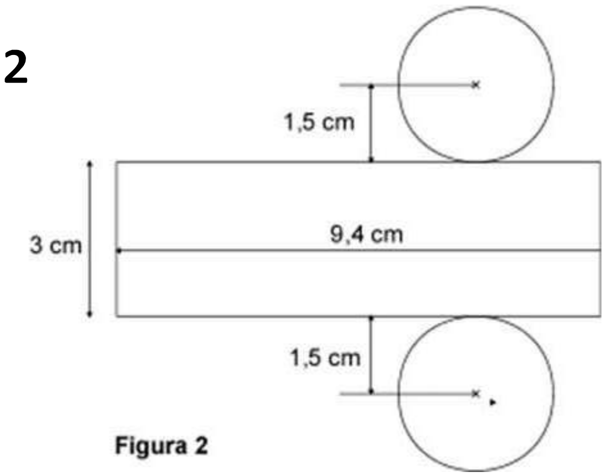


Figura 2

In generale

$A_l = 2\pi R \times h$

L’area totale A_t di un cilindro di rotazione è data dalla somma dell’area laterale A e dell’area delle due basi B.

Poiché l’area di una base è

$B = \pi R^2$,

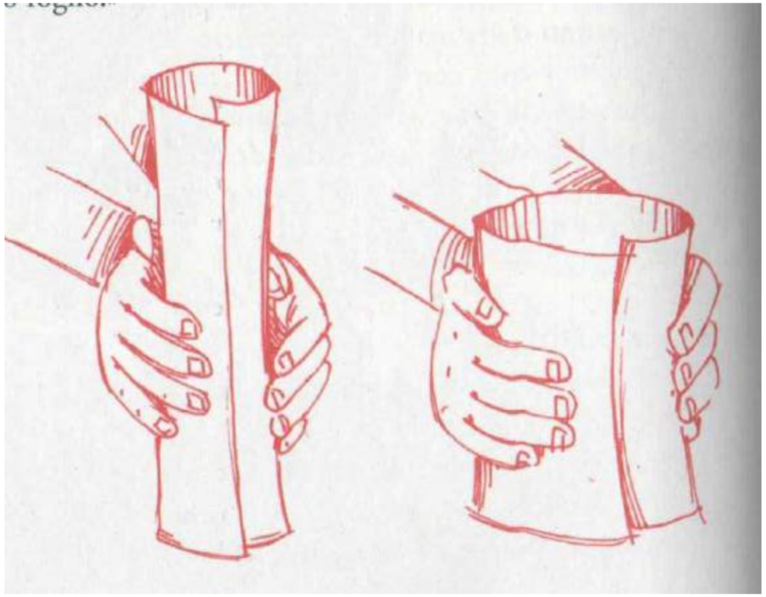
avremo:

$A_t = A_l + 2B = \boldsymbol{2 \pi R h + 2 \pi R^2} = 2 \pi R (h + R)$

Perché i barattoli di vernice non sono lunghi e stretti…

Come si deve arrotolare un foglio rettangolare di dimensioni $a \times b$ (con $a > b$) per ottenere un cilindro più capiente?

Proviamo con $a = 10, b = 4$



$$V_{sin} = \frac{\pi b^2}{4\pi^2} \times a = \frac{b^2 a}{4\pi}$$

$$V_{des} = \frac{\pi a^2}{4\pi^2} \times b = \frac{a^2 b}{4\pi}$$

$$\frac{V_{sin}}{V_{des}} = \frac{b^2 a}{a^2 b} = \frac{b}{a} < 1$$

$$V_{sin} < V_{des}$$

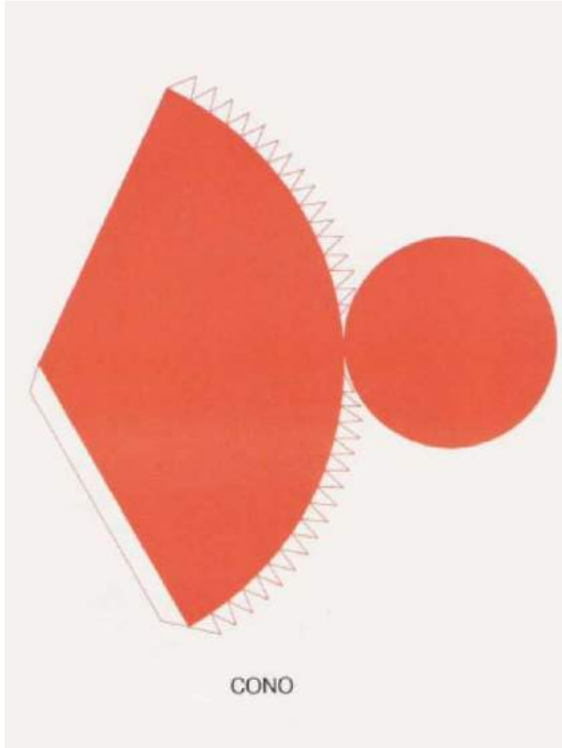
Il cono

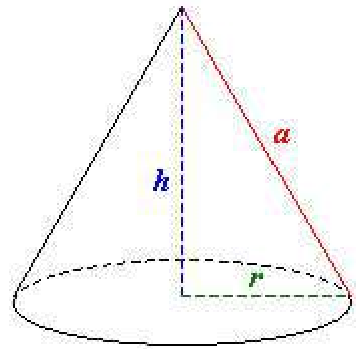
L’area della **superficie laterale** di un cono si ottiene moltiplicando la lunghezza della circonferenza di base per la misura dell’apotema e dividendo tale prodotto per due: dove l’apotema è la lunghezza del lato obliquo del cono .

$$A_l = \pi \times r \times a$$

L’area della **superficie totale** di un cono si ottiene sommando la superficie laterale e l’area della base:

$$A_t = \pi \times r \times a + \pi r^2$$





La piramide retta
a base quadrangolare

L'area laterale si ottiene

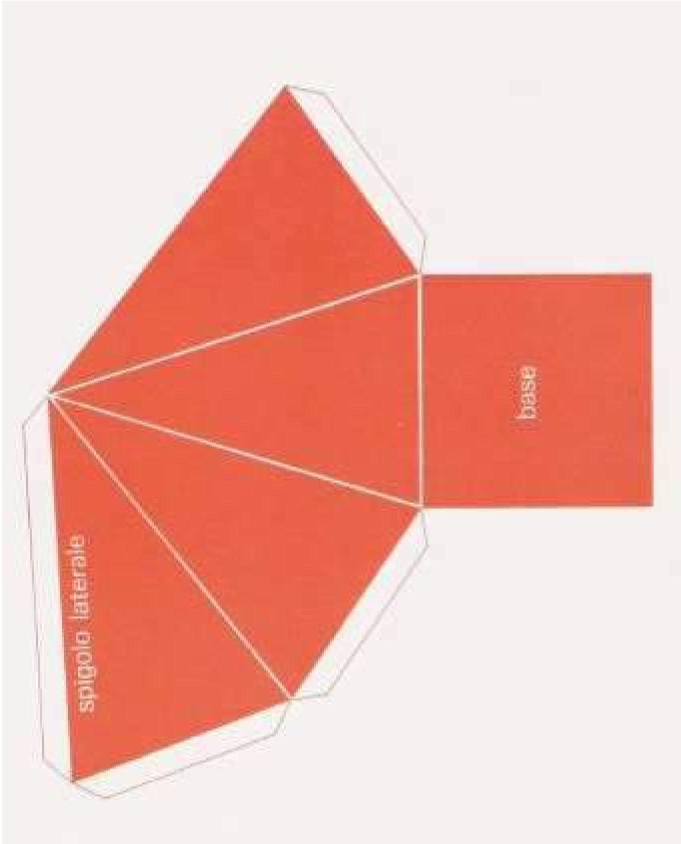
Sommando i 4 triangoli di lato

l ed altezza a $(apotema)$

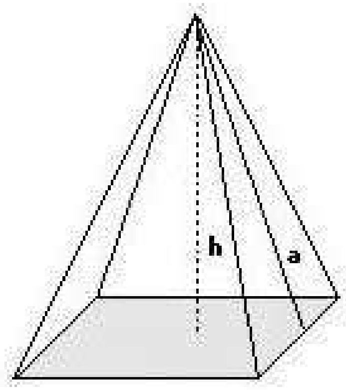
$$A_l = 4 \times \left(\frac{l \times a}{2}\right) = 2 \times l \times a = \frac{p \times a}{2}$$

Per avere la superficie totale basta

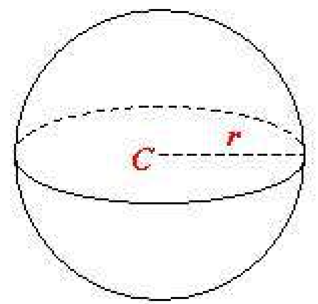
Aggiungere la base.



PIRAMIDE QUADRANGOLARE REGOLARE



La sfera



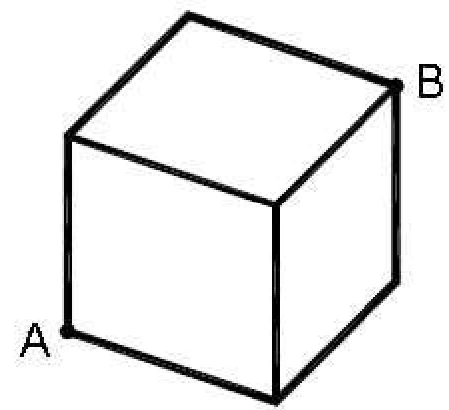
L’area della **superficie sferica** si ottiene moltiplicando per quattro l’area del suo cerchio massimo:

$$A = 4\pi r^2$$

Cammini minimi sui poliedri

S.Sbaragli, *Nel mondo quotidiano dei poliedri*

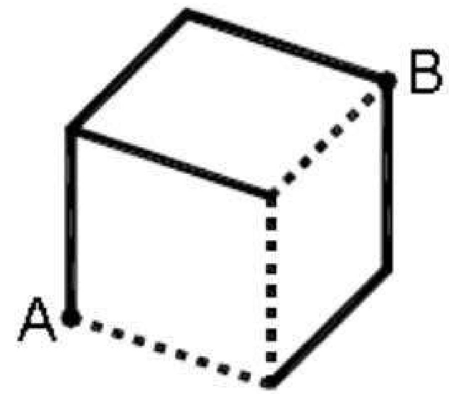
Con i poliedri costruiti, si possono realizzare tante situazioni problematiche. Ad esempio si può considerare un cubo "scheletrato" e dopo aver individuato due suoi vertici opposti, A e B come in figura, si può inventare la storia di una formichina che vuole andare da un vertice all'altro facendo il *cammino minimo* (ossia la strada più corta).

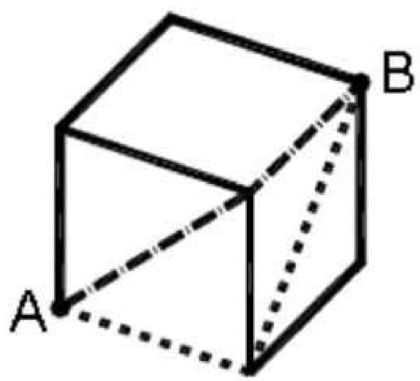


Si chiede quindi ai bambini di trovare una di queste strade e di stabilire quanto è lunga; si scoprirà che il cammino minimo è pari a tre volte la lunghezza del lato e che di questi cammini ce ne sono in tutto sei.

Che cosa succede se invece del cubo “scheletrato”, si considera il cubo pieno realizzato con il cartoncino? Qual è il cammino più corto sulla superficie del cubo per andare dal vertice A al vertice B?

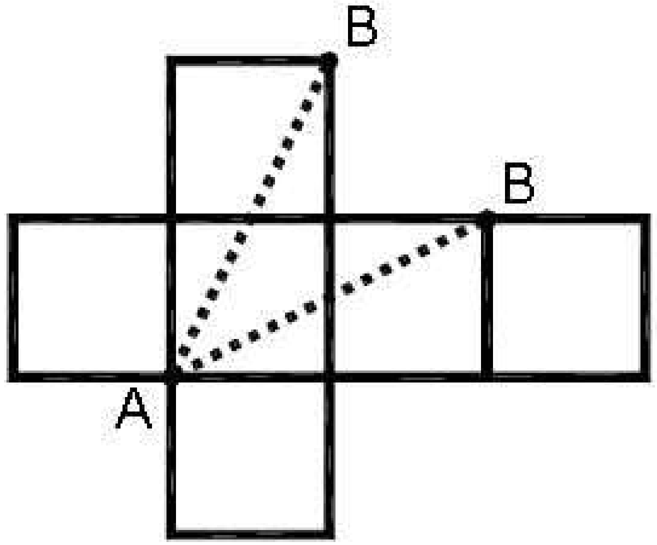
Questa volta non è così semplice come appare a prima vista; i bambini tenderanno ad indicare uno dei cammini tratteggiati in figura o uno analogo, ma questi non rappresentano i percorsi più brevi



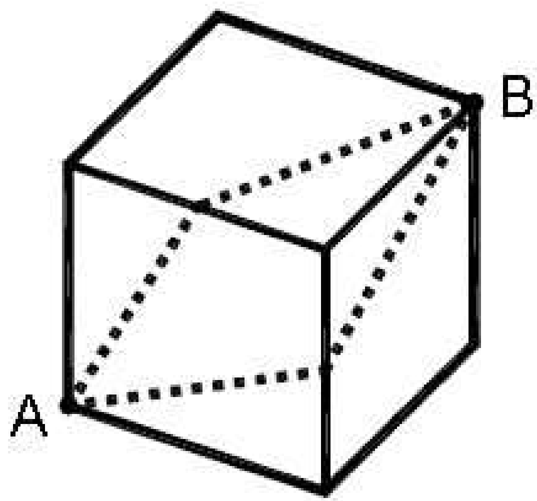


Per scoprire uno dei cammini minimi sulla superficie del cubo per andare dal vertice A al vertice B, occorre come prima cosa “aprire” il cubo e distenderlo in modo da ottenere lo *sviluppo* del cubo (passando così dalle tre dimensioni alle due dimensioni)

e, dopo aver individuato dove sono posizionati i due vertici A e B, si potrà disegnare la strada più corta come è indicato in figura.



Dopo aver richiuso il cubo si scopre..., sorpresa delle sorprese!, che il cammino minimo questa volta è davvero inaspettato e ancora una volta non è unico.

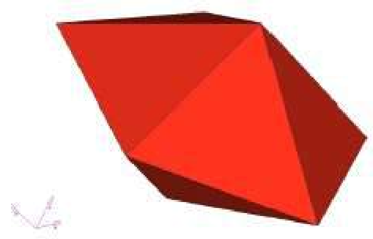


Si può così continuare l’attività considerando i vari sviluppi dei poliedri (passando

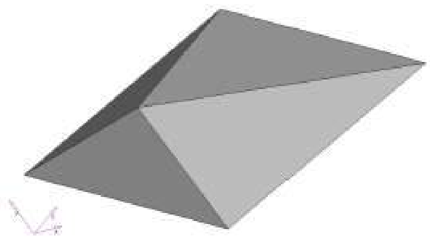
cioè dallo spazio al piano) e divertendosi con i cammini minimi su parallelepipedi, cilindri, sfere…

I poliedri regolari

(a) e (b) – non (c)



(b) e (c) – non (a)



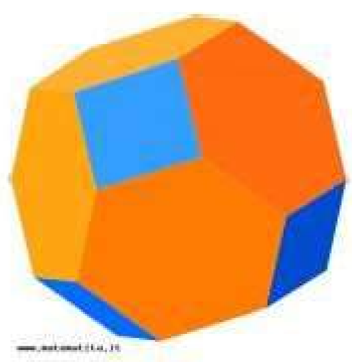
Un poliedro è detto regolare se soddisfa TUTTE le seguenti condizioni:

(a) le facce sono tutti poligoni regolari

(b) le facce sono tutte congruenti tra loro

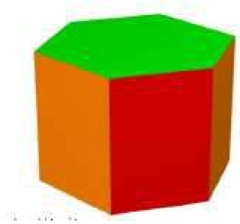
(c) in ogni vertice arriva lo stesso numero di facce

(a) e (c) – non (b)

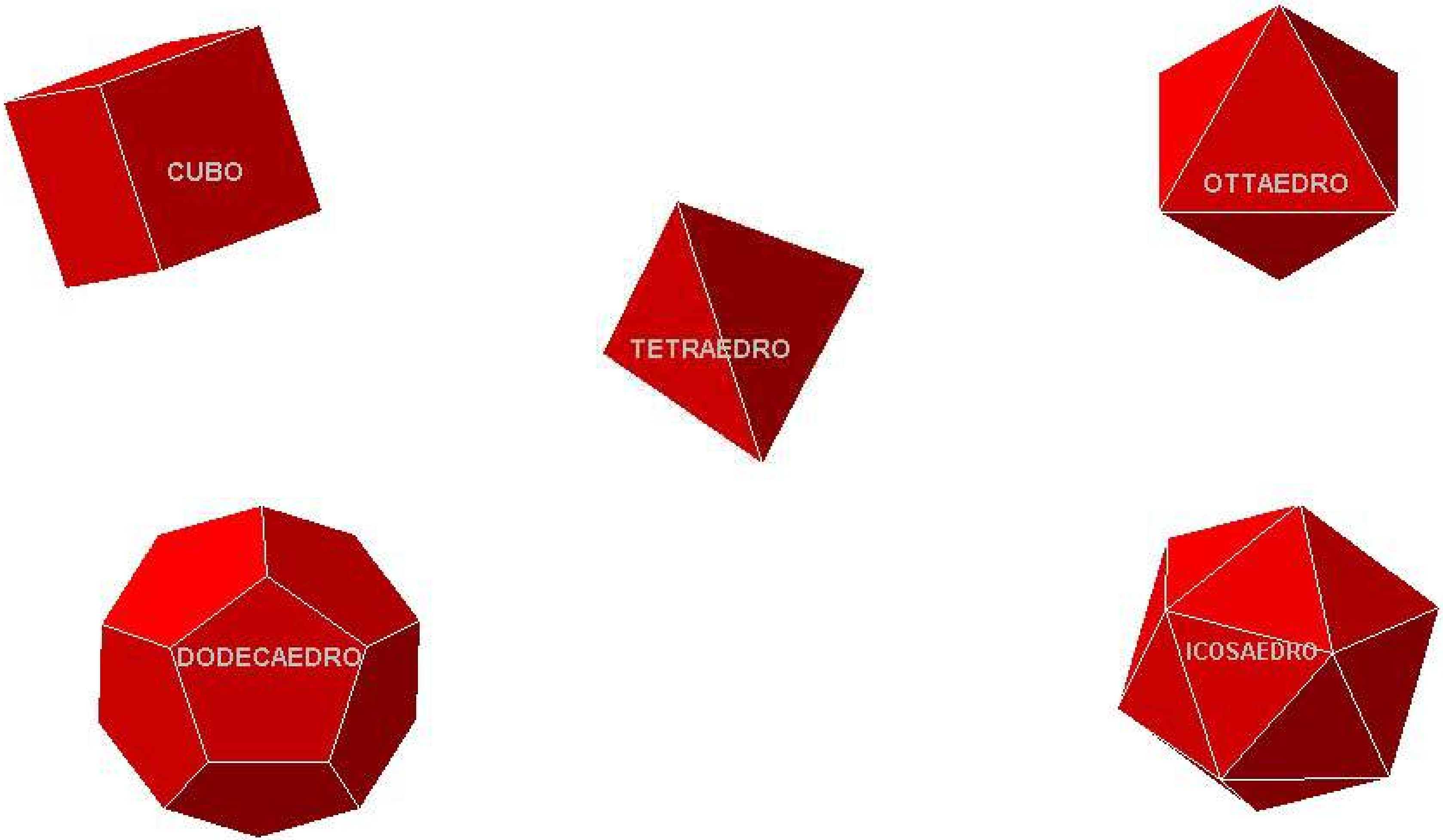


<u>Osservazione:</u>

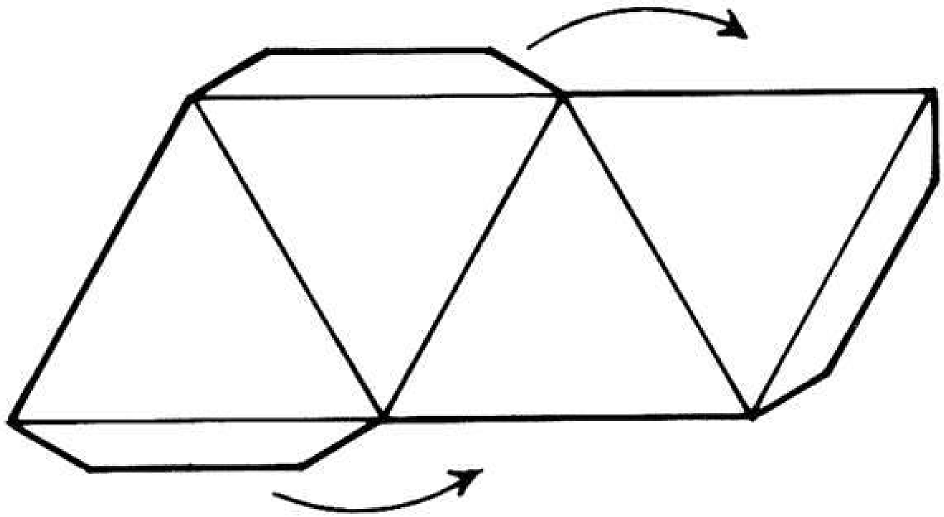
i prismi regolari e le piramidi regolari NON sono regolari secondo questa definizione.



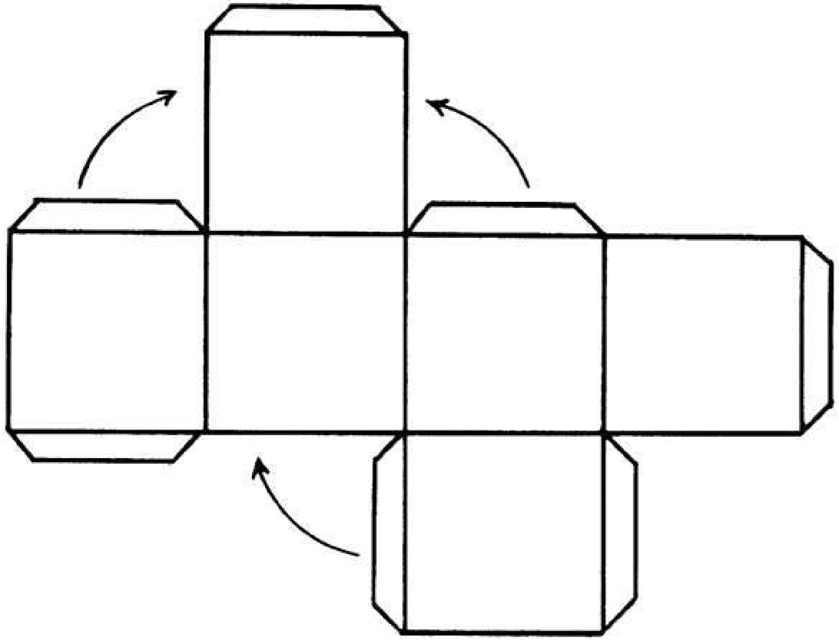
I poliedri regolari ovvero i solidi platonici



Gli sviluppi

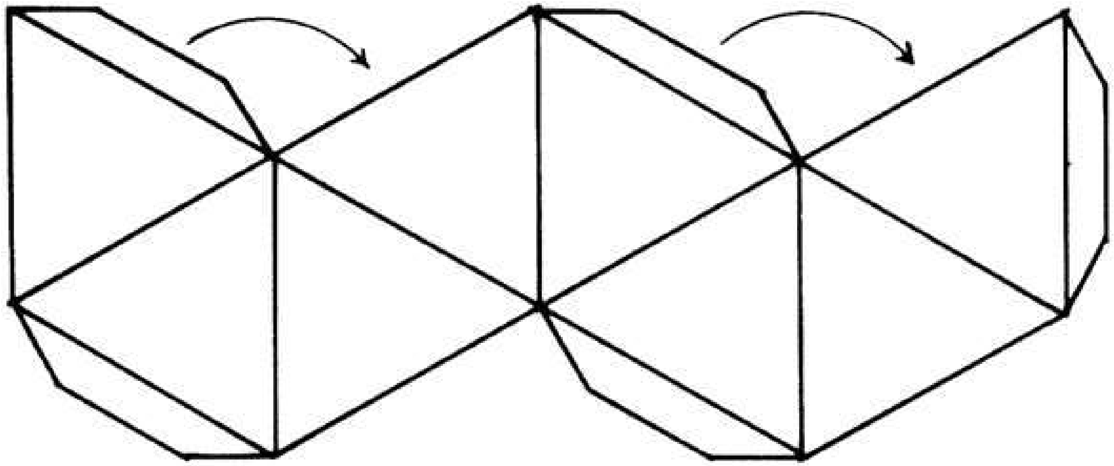


TETRAEDRO

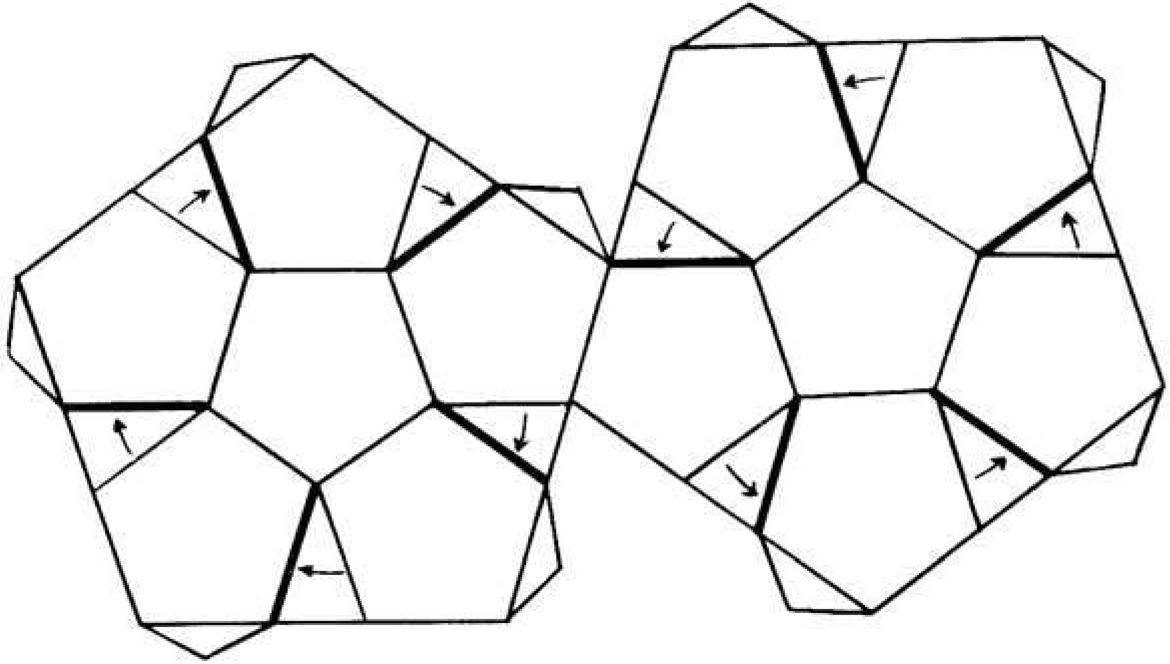


CUBO

Gli sviluppi

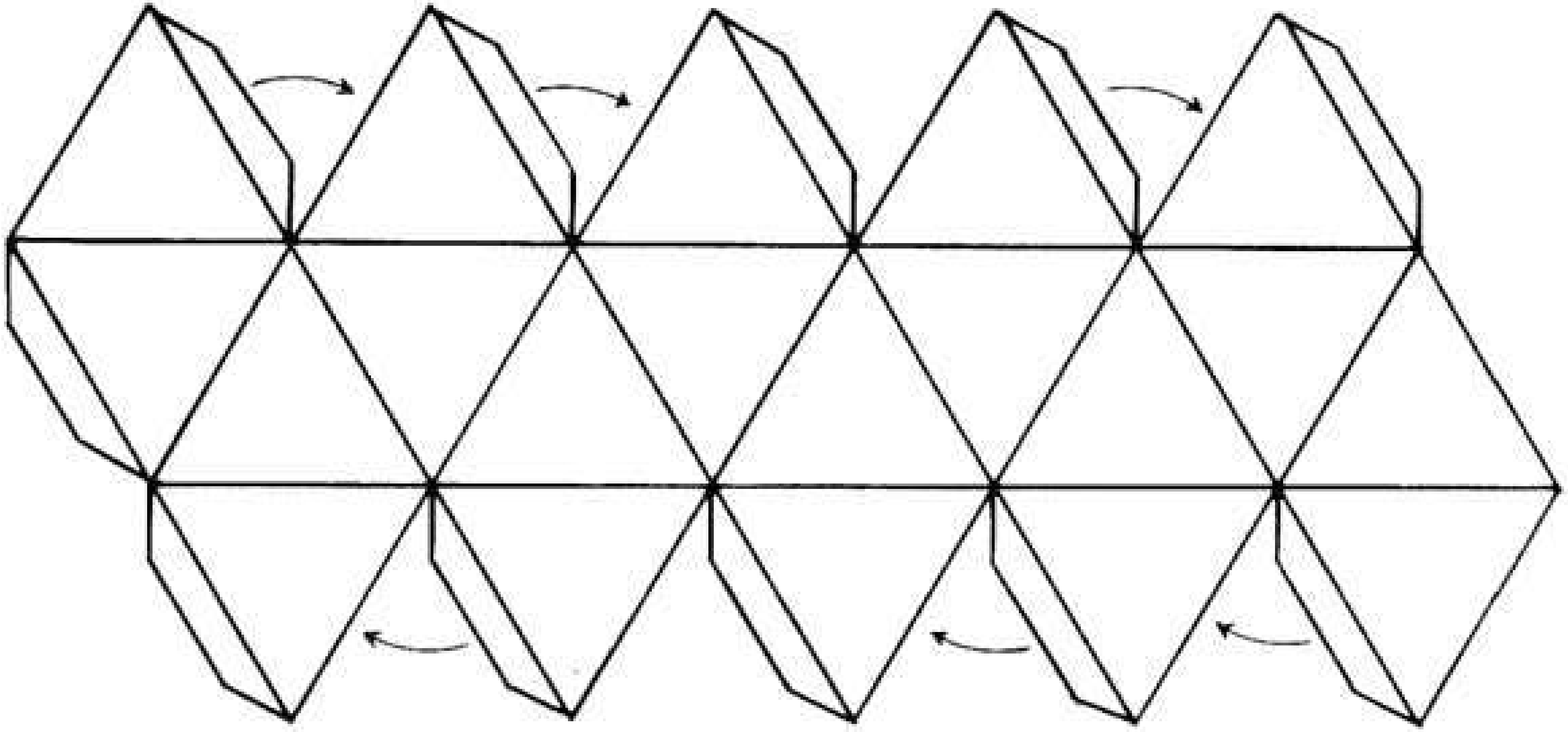


OTTAEDRO



DODECAEDRO

Gli sviluppi



ICOSAEDRO

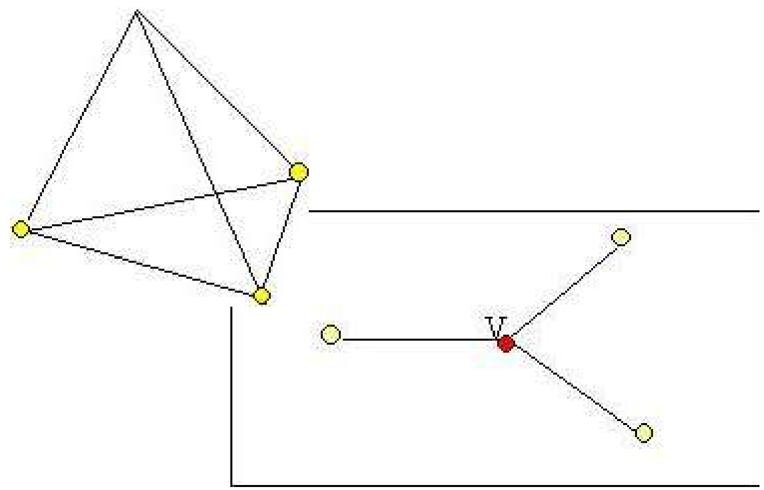
Perché sono solo 5 ?

- Per i poliedri c'è un vincolo che per i poligoni non esiste!

- Infatti in un vertice di un poliedro devono convergere almeno 3 facce che non stanno sullo stesso piano; **quindi la somma dei loro angoli deve essere inferiore a 360°**.

Per scoprire l'origine di questo vincolo possiamo usare un'apposita apparecchiatura:

prendi una tavoletta di legno, fissa in tre punti non allineati gli estremi di tre elastici. Lega insieme gli altri tre estremi degli elastici, trovando in questo modo il punto V (vedi figura). Sollevando V si può realizzare una piramide con la base fissa e gli angoloidi variabili. Ora, man mano che ci avviciniamo alla base, si può notare che l'angoloide aumenta così come la somma dei singoli angoli formati dagli spigoli che concorrono in V. Quando V sta sul piano di base accade che la somma degli angoli vale esattamente 360° però non esiste più la piramide, non si può più parlare di figura solida ma di figura piana.



- **Visto che il poliedro deve essere costruito con facce regolari prendiamo in esame i vari poligoni regolari ed osserviamo che cosa accade.**

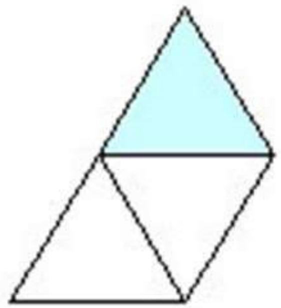
Perché sono solo 5 ?

<u>Con i triangoli</u>:

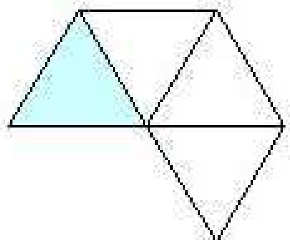
Ogni angolo di un triangolo equilatero misura 60°, è quindi possibile far incontrare

- è quindi possibile far incontrare in un vertice 3 facce

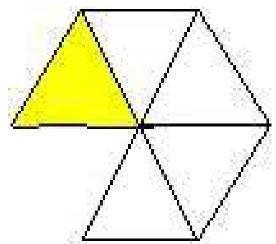
(3 x 60 = 180) ottenendo un tetraedro regolare



- 4 facce (4 x 60 = 240) ottenendo un ottaedro regolare

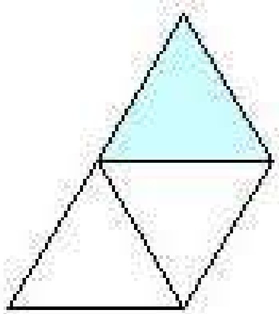


- 5 facce (5 x 60 = 300) ottenendo un icosaedro regolare



Perché sono solo 5 ?

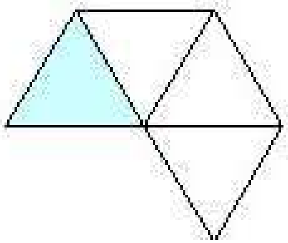
Con i triangoli:

Ogni angolo di un triangolo equilatero misura 60°, è qı  ɔile far incontrare

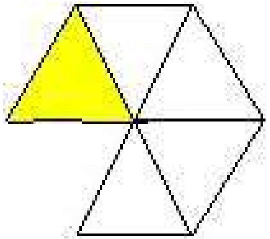
- è quindi possibile far incontrare in un vertice 3 facce

(3 x 60 = 180) ottenendo un tetraedro regolare

- 4 facce (4 x 60 = 240) ottenendo un ottaє



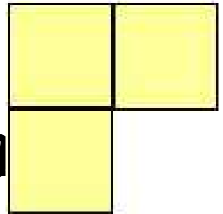
- 5 facce (5 x 60 = 300) oı ɔ regolare

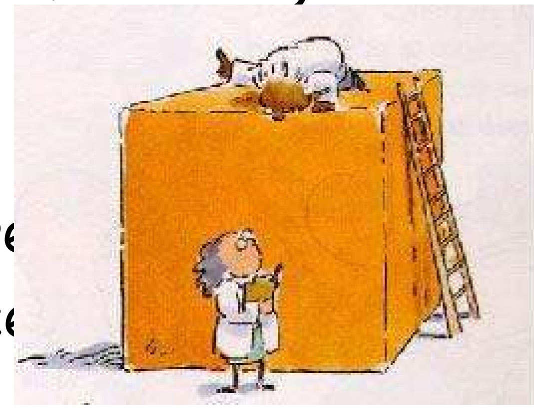


Perché sono solo 5 ?

<u>Con i quadrati</u>:

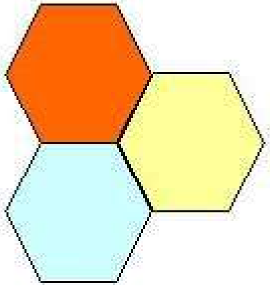
Ogni angolo di un quadrato misura 90°: è quindi possibile far incontrare in un vertice 3 facce (3 x 90 = 270) ottenendo un cubo.

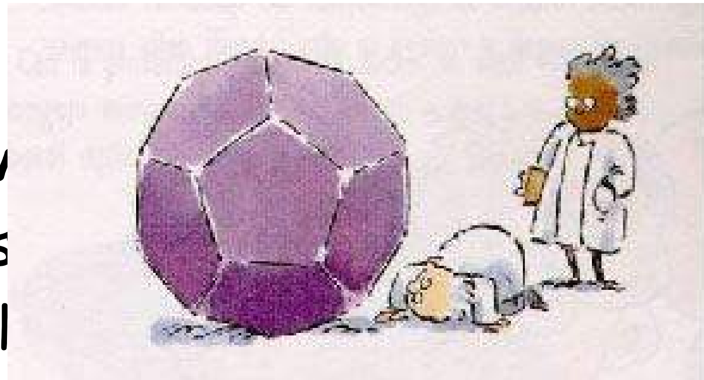




<u>Con i pentag</u>

Ogni angolo di un pentagono regolare
possibile far incontrare in un vertice ?4)
ottenendo un dodecaedro regolare.





Perché con ... i non va più be

Ogni angolo ... ono regolare mis
che si incontr... un vertice risul ... no
(3 x 120 = 360).

Quindi, solo il triangolo equilatero, il quadrato, il pentagono regolare possono essere facce di poliedri regolari.

Un approccio didattico per «scoprire» la formula di Eulero nei solidi convessi

Dopo aver costruito i poliedri regolari, si può immaginare di costruire una tabella come quella che segue, stimolando gli studenti a scoprire la formula che lega – allo stesso modo – i numeri di ogni riga

Tipo di poliedro	*v*	*f*	*s*
tetraedro	4	4	6
cubo	8	6	12
parallelepipedo (scatola da scarpe)	8	6	12
piramide a base quadrata	5	5	8
prisma a base pentagonale	10	7	15
tronco di piramide a basi esagonali	12	8	18

$$\boxed{v+f=s+2}$$

Vale anche per i poliedri regolari?

Poliedro	lati di una faccia = l	poligoni che concorrono in ogni vertice = n	Facce	Vertici	Spigoli
Tetraedro	3	3	4	4	6
Ottaedro	3	4	8	6	12
Cubo	4	3	6	8	12
Dodecaedro	5	3	12	20	30
Icosaedro	3	5	20	12	30

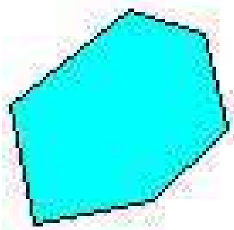
VALE PER TUTTI I POLIEDRI CONVESSI!

Proviamo a vedere perché…

Costruiamo un solido.

Prima puntata

Immaginiamo di costruire un qualunque poliedro, purché formato da facce piane senza buchi.
Mentre lo costruiamo, dobbiamo tener conto da una parte del numero complessivo di facce e vertici rappresentati, dall'altra del numero complessivo di spigoli rappresentato.
La prima faccia è un poligono con un certo numero di vertici ed lo stesso numero di lati
(supponiamo n)



$F + V = 1 + n$ | $S = n$

V= n

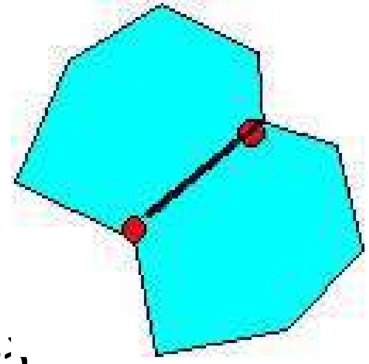
S= n

In questa situazione,

F +V possiede una sola unità in più di S

F+ V = S + 1

Seconda puntata



Aggiungiamo un'altra faccia di m lati . Essa avrà **un lato (spigolo per il solido) che non conta perché sovrapposto ad uno spigolo già contato due vertici che non contano per lo stesso motivo.**
Abbiamo però aggiunto una faccia e quindi quell' 1 in più che ha il numero di spigoli aggiunti, rispetto ai vertici, viene numericamente pareggiato dall' 1 costituito dalla faccia aggiunta.

Prima avevo **$F + V = 1 + S$ (con $F+V=n+1$ e $S=n$)**

$F + V = (1 + n) + 1 + (m -2) = n+m$

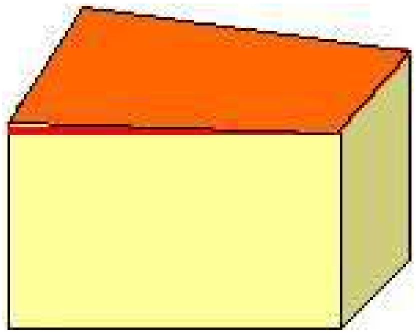
$S = n + (m - 1)= n+m-1$

La situazione resta immutata:

$F + V = S + 1$

Terza puntata

Pensiamo di essere arrivati alla fine della costruzione con un'altra faccia da aggiungere (come coperchio di una scatola)



Non aggiungeremo nessun vertice, non aggiungeremo nessun spigolo, abbiamo però da aggiungere una faccia

$$F + V = S + 2$$

Ed è il risultato che ci aspettavamo e che possiamo anche scrivere in altro modo:

$$F + V - S = 2$$

Che cosa hanno in comune una carta geografica politica e un poliedro (semplice)?

Consideriamo una mappa geografica in cui possiamo distinguere **regioni** e **confini** e stabiliamo di considerare *confinanti* due regioni che abbiamo almeno un tratto di confine in comune e non un solo punto. Chiamiamo **vertici** i punti dai quali si dipartono almeno 3 linee di confine.

Contiamo le regioni (**R**)– considerando anche quella esterna-- i confini (**C**) e i vertici (**V**) delle due mappe che seguono e consideriamo l'espressione

V+R-C

SOLIDI
ROTAZIONE

Formule
Esercitazioni

Il cilindro:

1. il **cilindro** è il solido generato dalla rotazione completa di un rettangolo attorno ad uno dei suoi lati;
2. il **cilindro equilatero** ha diametro di base ed altezza congruenti;
3. l'**area della superficie laterale del cilindro** è uguale al prodotto della lunghezza della circonferenza di base per la misura dell'altezza;
   formula diretta: $A_l = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$; formule inverse: $r = A_l : (2 \cdot \pi \cdot h)$; $h = A_l : (2 \cdot \pi \cdot r)$;
4. l'**area della superficie totale di un cilindro** è uguale alla somma dell'area della superficie laterale con le aree delle basi; formula diretta: $A_t = A_l + 2 \cdot A_b$; formule inverse: $A_l = A_t - 2 \cdot A_b$; $A_b = (A_t - A_l) : 2$;
5. il **volume del cilindro** è uguale al prodotto dell'area del cerchio di base per la misura dell'altezza;
   formula diretta: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$; formule inverse: $r = \sqrt{V : (\pi \cdot h)}$; $h = V : (\pi \cdot r^2)$;
6. le formule delle **aree delle superfici** e del **volume del cilindro equilatero** sono rispettivamente: $A_l = 4 \cdot \pi \cdot r^2$; $A_t = 6 \cdot \pi \cdot r^2$; $V = 2 \cdot \pi \cdot r^3$.

Il cono:

7. il **cono** è il solido generato dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno ad uno dei suoi cateti;
8. il **cono equilatero** ha il diametro di base e l'apotema congruenti;
9. l'**area della superficie laterale di un cono** è uguale al prodotto della lunghezza della semicirconferenza di base per la misura dell'apotema; formula diretta: $A_l = \pi \cdot r \cdot a$; formule inverse: $r = A_l : (\pi \cdot a)$; $a = A_l : (\pi \cdot r)$;
10. l'**area della superficie totale di un cono** è uguale alla somma dell'area della superficie laterale e dell'area di base: $A_t = A_l + A_b$ oppure $A_t = \pi \cdot r \cdot (a + r)$; formule inverse: $A_l = A_t - A_b$; $A_b = A_t - A_l$;
11. il **cono** è equivalente ad un terzo di un cilindro avente le misure del raggio di base e dell'altezza uguali;
    formula diretta: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h : 3$; formule inverse: $r = \sqrt{3 \cdot V : (\pi \cdot h)}$; $h = 3 \cdot V : (\pi \cdot r^2)$;
12. le formule per il calcolo dell'**area delle superfici** e **del volume del cono equilatero** sono rispettivamente: $A_l = 2 \cdot \pi \cdot r^2$; $A_t = 3 \cdot \pi \cdot r^2$; $V = \pi \cdot r^3 \cdot \sqrt{3} : 3$.

La sfera:

13. la **sfera** è il solido generato dalla rotazione completa di un semicerchio attorno al suo diametro;
14. la **superficie sferica** è l'insieme di tutti i punti dello spazio che hanno la stessa distanza da un punto detto **centro**;
15. l'**area della superficie sferica** è equivalente alla superficie laterale del cilindro equilatero ad essa circoscritto ed è uguale a quattro volte l'area di un suo cerchio massimo; formula diretta: $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$;
    formula inversa: $r = \sqrt{A : (4 \cdot \pi)}$;
16. il **volume della sfera** è uguale al prodotto dei $\frac{4}{3}$ di π per il cubo della misura del raggio; formula diretta:
    $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$; formula inversa: $r = \sqrt[3]{3 \cdot V : (4 \cdot \pi)}$.

Gli altri solidi di rotazione: La rotazione di un:

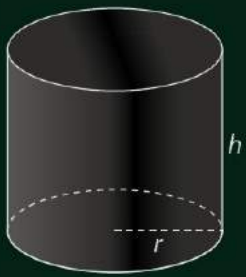
- **triangolo rettangolo attorno all'ipotenusa** genera due coni sovrapposti con la base in comune; formule: $A_{(solido)} = A_{l_1} + A_{l_2}$; $V_{(solido)} = V_1 + V_2$;
- **trapezio rettangolo attorno alla base maggiore** genera un cilindro e un cono sovrapposto con la base in comune; formule: $A_{(solido)} = A_{l(cilindro)} + A_{l(cono)} + A_{b(cilindro)}$; $V_{(solido)} = V_{(cilindro)} + V_{(cono)}$;
- **trapezio rettangolo attorno alla base minore** genera un cilindro e un cono in esso cavo; formule: $A_{(solido)} = A_{l(cilindro)} + A_{l(cono)} + A_{b(cilindro)}$; $V_{(solido)} = V_{(cilindro)} - V_{(cono)}$;
- **trapezio isoscele attorno alla base maggiore** genera un cilindro e due coni sovrapposti con la base in comune; formule: $A_{(solido)} = A_{l(cilindro)} + 2 \cdot A_{l(cono)}$; $V_{(solido)} = V_{(cilindro)} + 2 \cdot V_{(cono)}$;
- **trapezio isoscele attorno alla base minore** genera un cilindro e due coni in esso cavi; formule: $A_{(solido)} = A_{l(cilindro)} + 2 \cdot A_{l(cono)}$; $V_{(solido)} = V_{(cilindro)} - 2 \cdot V_{(cono)}$.

Esercizio Svolto

L'area della superficie totale di un cilindro

Le misure del raggio di base e dell'altezza di un cilindro sono rispettivamente 16 cm e 27 cm; calcola l'area della superficie totale del cilindro.

Svolgimento



Dati	Incognita
$r = 16$ cm $h = 27$ cm	A_t

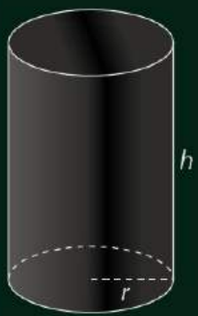
$$A_l = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = (2 \cdot \pi \cdot 16 \cdot 27)\ \text{cm}^2 = 864\pi\ \text{cm}^2$$
$$A_b = \pi \cdot r^2 = \left(\pi \cdot 16^2\right)\ \text{cm}^2 = 256\pi\ \text{cm}^2$$
$$A_t = 2 \cdot A_b + A_l = (2 \cdot 256\pi\ + 864\pi)\ \text{cm}^2 = 1376\pi\ \text{cm}^2$$

Esercizio Svolto

L'area della superficie totale e il volume di un cilindro

L'area della superficie laterale e la misura dell'altezza di un cilindro sono rispettivamente $840\pi\ \text{cm}^2$ e 35 cm; calcola l'area della superficie totale e il volume del cilindro.

Svolgimento



Dati	Incognite
$A_l = 840\pi\ \text{cm}^2$	A_t
$h = 35$ cm	V

Determiniamo la misura del raggio di base applicando la formula inversa dell'area della superficie laterale.

$$r = \frac{A_l}{2 \cdot \pi \cdot h} = \frac{840\cancel{\pi}}{2 \cdot \cancel{\pi} \cdot 35}\ \text{cm} = 12\ \text{cm}$$

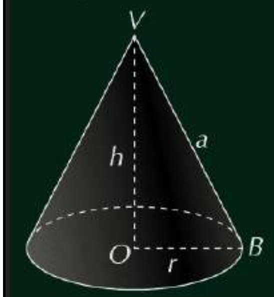
$$A_b = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 12^2\ \text{cm}^2 = 144\pi\ \text{cm}^2$$
$$A_t = 2 \cdot A_b + A_l = (2 \cdot 144\pi + 840\pi)\ \text{cm}^2 = 1128\pi\ \text{cm}^2$$
$$V = A_b \cdot h = (144\pi \cdot 35)\ \text{cm}^3 = 5040\pi\ \text{cm}^3$$

Esercizio Svolto

L'area della superficie totale di un cono

Un cono ha la misura del raggio di base e dell'altezza rispettivamente di 15 cm e 28 cm; calcola l'area della superficie totale e il volume.

Svolgimento



Dati	Incognite
$\overline{OB} = r = 15$ cm	A_t
$\overline{VO} = h = 28$ cm	V

$$\overline{VB} = a = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{15^2 + 28^2}\ \text{cm} = 31{,}76\ \text{cm}$$

$$A_l = \pi \cdot r \cdot a = \pi \cdot 15 \cdot 31{,}76\ \text{cm}^2 = 476{,}4\pi\ \text{cm}^2$$

$$A_b = \pi \cdot r^2 = 15^2 \cdot \pi\ \text{cm}^2 = 225\pi\ \text{cm}^2$$

$$A_t = A_b + A_l = (225\pi + 476{,}4\pi)\ \text{cm}^2 = 701{,}4\pi\ \text{cm}^2$$

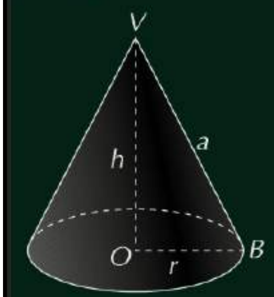
$$V = A_b \cdot h : 3 = (225\pi \cdot 28 : 3)\ \text{cm}^3 = 2100\pi\ \text{cm}^3$$

Esercizio Svolto

Le formule inverse di un cono

Il volume di un cono è 6480π cm^3 e la misura dell'altezza è 15 cm; calcola l'area della superficie totale.

Svolgimento



Dati	Incognita
$V = 6480\pi$ cm^3	A_t
$h = \overline{VO} = 15$ cm	

Calcoliamo l'area di base applicando la formula inversa del volume

$$A_b = \frac{3 \cdot V}{h} = \frac{3 \cdot V}{\overline{VO}} = \frac{3 \cdot 6480\pi}{15}\ \text{cm}^2 = 1296\pi\ \text{cm}^2$$

$$r = \overline{OB} = \sqrt{\frac{A_b}{\pi}} = \sqrt{\frac{1296\pi}{\pi}}\ \text{cm} = 36\ \text{cm}$$

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo VOB per determinare la misura dell'apotema:

$$a = \overline{VB} = \sqrt{\overline{VO}^2 + \overline{OB}^2} = \sqrt{15^2 + 36^2}\ \text{cm} = \sqrt{225 + 1296}\ \text{cm} = \sqrt{1521}\ \text{cm} = 39\ \text{cm}$$

$$A_l = \pi \cdot r \cdot a = \pi \cdot \overline{OB} \cdot \overline{VB} = \pi \cdot 36 \cdot 39\ \text{cm}^2 = 1404\pi\ \text{cm}^2$$

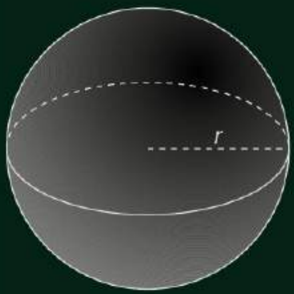
$$A_t = A_b + A_l = (1296\pi + 1404\pi)\ \text{cm}^2 = 2700\pi\ \text{cm}^2$$

Esercizio Svolto

La superficie e il volume di una sfera

La circonferenza massima di una sfera misura 46π cm; calcola l'area della superficie sferica e il volume della sfera.

Svolgimento



Dato	Incognite
$C_{massima} = 46\pi$ cm	A
	V

Calcoliamo la misura del raggio della sfera che equivale al raggio della circonferenza massima.

$r = C_{massima} : 2\pi = (46\pi : 2\pi)$ cm $= 23$ cm

$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = (4 \cdot \pi \cdot 23^2)$ cm$^2 = 2116\pi$ cm^2

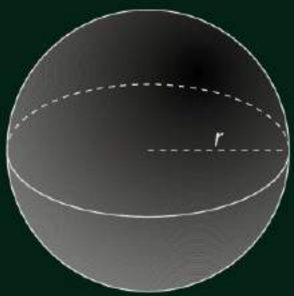
$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 23^3\right) \text{ cm}^3 = 16222,\overline{6}\pi \text{ cm}^3$$

Esercizio Svolto

Le formule inverse di una sfera

Calcola il volume di una sfera sapendo che l'area della superficie sferica è 1764π cm^2.

Svolgimento



Dato	Incognita
$A = 1764\pi$ cm^2	V

Per calcolare la misura del raggio, applichiamo la formula inversa:

$r = \sqrt{A : 4\pi} = \sqrt{1764\pi : (4\pi)}$ cm $= \sqrt{441}$ cm $= 21$ cm

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 21^3 \text{ cm}^3 = 12348\pi \text{ cm}^3$$