

Эмпирическая модель стохастической волатильности финансовых флуктуаций

Бухбиндер Г. Л. Чистилин К.М.

Омский государственный университет,
644077, Омск пр.Мира 55
glb@omsu.ru, chistilin_k@mail.ru

В работе исследуется стохастическая динамика волатильности, характеризующая величину флуктуаций стоимости ценных бумаг и индексов. На основе анализа индекса Dow-Jones проверены марковские свойства волатильности. Показано, что численное решение уравнения Чемпена-Колмогорова достаточно хорошо согласуется с условными эмпирическими плотностями для ценовых приращений и делается вывод о том, что волатильность может быть рассмотрена как марковский процесс. На основе эмпирических данных вычислены коэффициенты Крамерса-Мойяла. Показано, что ненулевыми являются только два первых коэффициента разложения, определяющих вид стохастического дифференциального уравнения Ито для волатильности. Численно решено соответствующее уравнение Фоккера-Планка для вероятностных плотностей и показано, что стационарные плотности достаточно хорошо воспроизводят эмпирические стационарные распределения. Показано, что эмпирические данные приводят к так называемой экспоненциальной модели Орнштейна-Уленбека. В работе получено обобщение этой модели на случай больших значений волатильности.

Введение

При описании стоимости ценных бумаг на финансовых рынках широко используется модель геометрического броуновского движения. Согласно этой модели стоимость актива S_t , как функция времени t , подчиняется стохастическому дифференциальному уравнению Ито вида

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_1(t) \quad (1)$$

где постоянные μ и σ соответственно коэффициент дрейфа и волатильность, $W_1(t)$ стандартный винеровский процесс.

При постоянном σ уравнение (1) предсказывает логнормальное распределение стоимости актива, а сама σ может быть оценена как среднее квадратичное отклонение приращений логарифма стоимости, измеряемых в течении некоторого промежутка времени. Многочисленные наблюдения, однако, показывают, что эмпирические распределения затухают значительно медленнее, чем предсказывает логнормальное распределение (эффект плоских хвостов) [1]. Накопленные в настоящее время эмпирические данные [1] позволяют сделать вывод, что предположение о постоянстве волатильности не учитывает многие важные особенности рынка. Оценка волатильности как среднее квадратичное отклонение показывает, что существуют периоды низкой и высокой волатильности. Это обстоятельство, в частности, приводит к наблюдаемым долгоживущим корреляциям, например, абсолютных логарифмических приращений стоимости актива, что противоречит, вытекающему из уравнения (1) заключению об их независимости.

Чтобы учесть различного рода наблюдаемые закономерности были введены модели со стохастической волатильностью, согласно которым волатильность рассматривается как случайная переменная и в общем случае как функция $\sigma = \sigma(Y(t))$ некоторого стохастического процесса $Y(t)$.

В настоящее время в литературе обсуждаются различные математические модели со стохастической волатильностью. Все эти модели в той или иной мере основаны или на модели геометрического броуновского движения (1) или исходят из процесса Орнштейна-Уленбека [2]. Во всех случаях динамическое уравнение для $Y(t)$ может быть представлено в виде стохастического дифференциального уравнения Ито:

$$dY = \alpha(m - Y)dt + f(Y)dW_2(t) \quad (2)$$

$$\sigma = \sigma(Y);$$

Уравнение (2) определяет так называемый класс средневозвратных процессов, в которых Y в среднем стремится к m при $t \rightarrow \infty$ со скоростью α . Винеровский процесс $W_1(t)$ в общем случае коррелирован с процессом $W_2(t)$ из (1). Можно выделить четыре различные модели со стохастической волатильностью.

1. Модель Орнштейна-Уленбека [3,4], в которой $\sigma = Y$, $f(Y) = k$, где k - некоторая постоянная, и

$$dY = \alpha(m - Y)dt + k dW_2(t) \quad (3)$$

2. Экспоненциальная модель Орнштейна-Уленбека [4] с $\sigma = \exp(Y)$ и $f(Y) = k$, в которой принимается, что $Y = \ln(\sigma)$ следует процессу Орнштейна-Уленбека (3), а переменная σ , как легко показать, используя лемму Ито, удовлетворяет уравнению

$$d\sigma = \sigma \left[\frac{k^2}{2} - \alpha(\ln \sigma - m) \right] dt + k \sigma dW_2(t) \quad (4)$$

3. Модель Гестона [5], в которой $\sigma = \sqrt{Y}$, и $f(Y) = k\sqrt{Y}$. В этой модели принимается, что волатильность σ представляет собой процесс Орнштейна-Уленбека типа (3), откуда следует уравнение для $Y = \sigma^2$

$$dY = \alpha(m - Y)dt + k\sqrt{Y} dW_2(t) \quad (5)$$

4. Модель Гула-Уайта [6] с $\sigma = \sqrt{Y}$, $f(Y) = kY$ и

$$dY = \alpha(m - Y)dt + kY dW_2(t) \quad (6)$$

Эта модель исходит из геометрического броуновского движения для Y .

Первоначально модели (3) - (6) были введены, чтобы обобщить теорию Блэка-Шоулса оценки опционов на случай меняющейся со временем волатильности. Параметры моделей определялись в результате подгонки к эмпирическим данным по ценам опционных контрактов, стоимость которых зависит от стоимости другого (базового) актива. В качестве последнего часто

выступают акции. При этом вопрос, в какой мере каждая из перечисленных выше моделей описывает динамику самих акций (что является первичным) оставался открытым. В этой связи, в последнее время, в физической литературе активно обсуждается вопрос о применимости той или иной модели со стохастической волатильностью для описания временной эволюции котировок акций, рыночных индексов или обменных валютных курсов. Один из подходов состоит в том, что параметры моделей определяются в результате подгонки теоретических вероятностных распределений ценовых разностей к эмпирическим кривым. Так, исследования, проведенные в работах [7-8] показали, что модель Гестона достаточно хорошо воспроизводит эмпирические распределения для индекса Dow-Jones и ряда акций. С другой стороны, в случае высокочастотной динамики, модель Гестона, а так же модель Гула-Уайта, примененные к немецкому индексу DAX, дают ценовые распределения, не согласующиеся с «хвостами» эмпирических кривых [9].

Альтернативный подход - подобрать параметры таким образом, чтобы воспроизвести другие наблюдаемые рыночные закономерности (stylized facts). Одной из таких закономерностей является эффект «рычага» (leverage effect), устанавливающий своеобразную зависимость между уменьшением стоимости актива и увеличением его волатильности [1]. Так, в работах [10,11] параметры модели Орнштейна-Уленбека (3) были оценены на основе сравнения теоретических предсказаний с наблюдаемым «leverage» эффектом для индекса Dow-Jones. Чтобы выявить наиболее подходящую, модели Орнштейна-Уленбека, Гестона и экспоненциальная модель Орнштейна-Уленбека использовались для вычисления «leverage» эффекта и автокорреляционной функции волатильности, которые затем сравнивались с эмпирическими кривыми для других рыночных индексов (DAX, NIKKEI, S&P500) [12]. Было показано, что качественно все эти модели воспроизводят наблюдаемый «leverage» эффект за счет подбора параметров, однако, эмпирические данные не позволяют сделать определенный вывод о наиболее подходящей модели.

Таким образом, путем подгонки параметров перечисленные выше теоретические модели могут иногда достаточно хорошо воспроизводить вероятностные плотности ценовых приращений, или описывать отдельные наблюдаемые закономерности, однако, сделать однозначный вывод о том, какая из моделей более реалистична, на основе имеющихся данных не представляется возможным. Кроме того, не ясно, способна ли какая-либо модель описывать весь спектр наблюдаемых эффектов одновременно.

В этой связи представляет интерес получения модели стохастической волатильности непосредственно из эмпирических данных. Попытка построения такой модели (на основе индекса Dow-Jones) была предпринята в работе [13]. В этой работе предполагалось, что волатильность следует стохастическому процессу, задаваемому уравнением

$$d\sigma = \alpha(\sigma)dt + \beta(\sigma)W_2(t) \quad (7)$$

где принималось, что $\beta(\sigma) = \phi\sigma^\gamma$ с постоянными ϕ и γ , которые оценивались из эмпирических данных. Функциональная форма коэффициента дрейфа $\alpha(\sigma)$ определялась затем на основе сравнения стационарного решения уравнения Фоккера-Планка для распределения волатильности, соответствующего (7), с эмпирической плотностью. В результате для волатильности была получена модель, достаточно близкая к экспоненциальной модели Орнштейна-Уленбека.

Существенным недостатком данного подхода является заранее предопределенная форма диффузионного коэффициента $\beta(\sigma)$. Избежать подобного рода предположений позволяет подход, предложенный в работе [14] для определения вида стохастического процесса, управляющего высокочастотной динамикой обменного курса DEM/USD и примененный в последствии к описанию динамики ряда акций и рыночных индексов [15-16]. Этот подход основан на теории марковских процессов и позволяет непосредственно из имеющихся данных извлечь коэффициенты стохастического дифференциального уравнения Ито. Вопрос о том, насколько динамика волатильности может быть аппроксимирована марковским процессом, является открытым. Далее будет показано, что эмпирические данные поддерживают положительный ответ на этот вопрос

В данной работе, на основе анализа 5-минутных данных для индекса Dow-Jones за последние пять лет [1] получены коэффициенты разложения Крамерса-Мойала и показано, что ненулевыми являются только два первых коэффициента D_1 и D_2 , которые и определяют вид стохастического дифференциального уравнения для волатильности.

Анализ эмпирических данных

Волатильность, в отличие от ценовых приращений, не определяется непосредственно в момент сделки. В настоящее время единой точки зрения на способ вычисления волатильности нет. Наиболее часто используют способ оценки волатильности как среднеквадратичного отклонения [17]:

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{T} \sum_{t'=t}^{t+T} (r_{t'} - \langle r_t \rangle)^2 \quad (8)$$

$$\langle r_t \rangle = \frac{1}{N} \sum_{t'=t}^{t+T} r_{t'} \quad (9)$$

где $r_t = \ln S_t / S_{t-\Delta}$ – логарифмические приращения стоимости, $T=(N-1)\Delta$ – интервал, по которому производится усреднение и $\Delta=5$ мин. Интервал усреднения T выбран равным 2 часам.

Для вычисления волатильности были использованы не перекрывающиеся интервалы усреднения T , при этом значения волатильности рассчитывались через интервал времени равный T . Таким образом, характерная временная шкала процесса равна T .

Полученные при помощи уравнения (8) эмпирические значения σ_t^2 были использованы в работе для построения стационарных распределений волатильности, а так же условных вероятностных плотностей. Основное предположение состоит в том, что волатильность является стационарным процессом. Данное предположение достаточно часто используется при анализе финансовых данных.

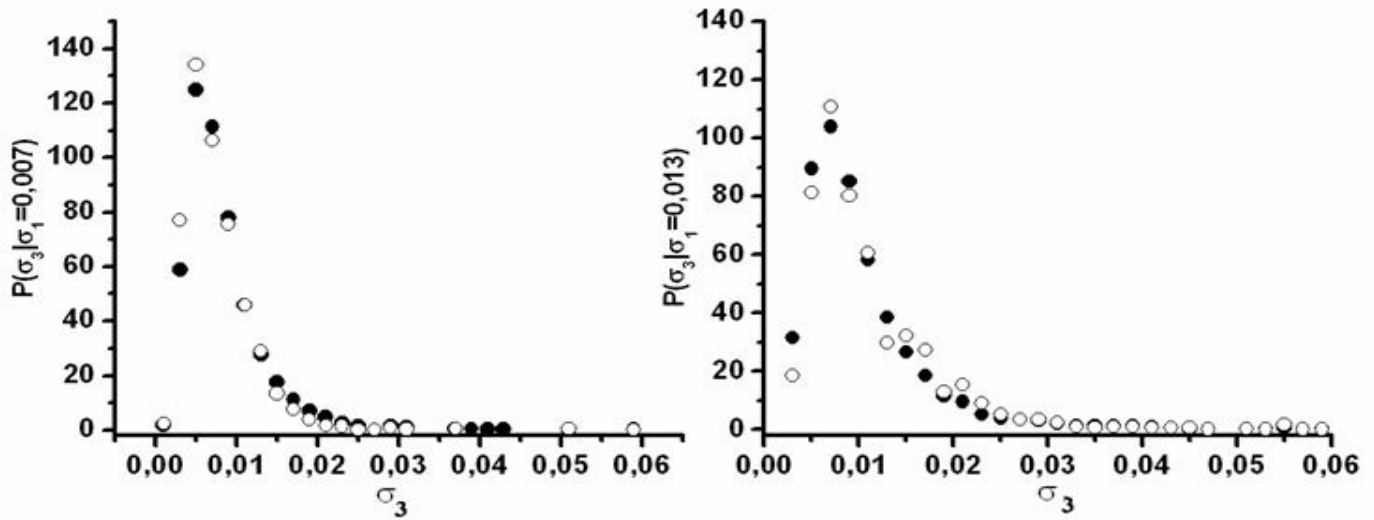


Рис.1 Условные плотности $p(\sigma_3, t_3 | \sigma_1, t_1)$, вычисленные непосредственно из эмпирических данных (пустые кружки) и на основе численного интегрирования правой части (10) (черные кружки); $t_1 = 0, t_2 = T, t_3 = 2T$. Наблюдается достаточно хорошее соответствие между кривыми.

Чтобы показать, что волатильность является марковским процессом, рассмотрим уравнение Чепмена-Колмогорова [2]

$$p(\sigma_3, t_3 | \sigma_1, t_1) = \int p(\sigma_3, t_3 | \sigma_2, t_2) p(\sigma_2, t_2 | \sigma_1, t_1) d\sigma \quad (10)$$

которое является необходимым условием марковского процесса. Для проверки выполнения уравнения Чепмена-Колмогорова было произведено численное интегрирование его правой части. При этом условные вероятностные плотности вычислялись из эмпирических данных. Затем было произведено сравнение результатов интегрирования (правая часть (10)) с условными плотностями $p(\sigma_3, t_3 | \sigma_1, t_1)$, так же вычисленными из эмпирических данных (левая часть уравнения (10)). Результаты расчетов приведены на рис. 1. Как видно из графиков, соответствие между кривыми достаточно хорошее.

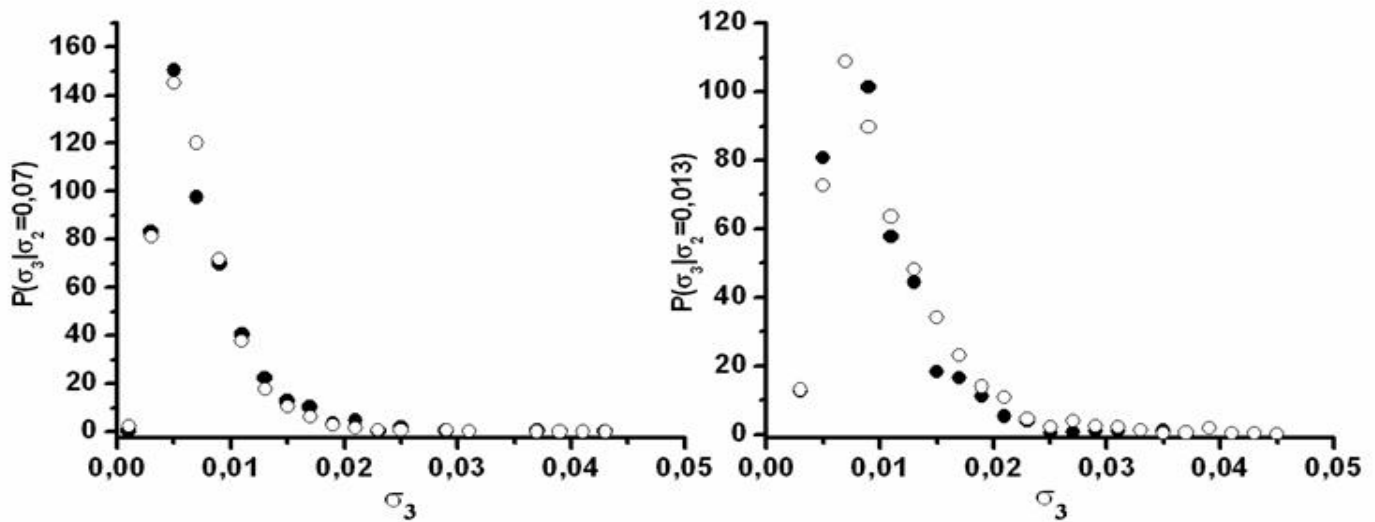


Рис.2 Условные плотности $p(\sigma_3, t_3 | \sigma_2, t_2)$ (белые кружки) и $p(\sigma_3, t_3 | \sigma_2, t_2; \sigma_1, t_1)$ (черные кружки) при значениях $t_1 = 0, t_2 = T, t_3 = 2T, \sigma_1 = 0.01$.

Было так же проверено равенство:

$$p(\sigma_N, t_N | \sigma_{N-1}, t_{N-1}; \dots; \sigma_1, t_1) = p(\sigma_N, t_N | \sigma_{N-1}, t_{N-1}) \quad (11)$$

$$t_N > t_{N-1} > \dots > t_1$$

определяющее марковский процесс. Строго говоря, данное соотношение должно быть проверено для всех N , однако, в связи с тем, что количество статистических данных ограничено, справедливость данного равенства на основе использующихся для анализа данных была проверена для $N=3$:

$$p(\sigma_3, t_3 | \sigma_2, t_2; \sigma_1, t_1) = p(\sigma_3, t_3 | \sigma_2, t_2) \quad (12)$$

На рис.2 приведены результаты сравнения условных плотностей (12). Как видно из рисунка, соответствие между кривыми достаточно хорошее. Основываясь на приведенных результатах, было сделано предположение, что волатильность σ_t может быть аппроксимирована марковским процессом.

Вычисление коэффициентов Крамерса-Мойала

Для марковского процесса соответствующая условная плотность (плотность вероятности) удовлетворяет управляющему уравнению в форме разложения Крамерса-Мойала [18]:

(13)

$$\frac{\partial p(\sigma, t | \sigma_0, t_0)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial \sigma} \right)^k D_k(\sigma, t) p(\sigma, t | \sigma_0, t_0)$$

Коэффициенты разложения $D_k(\sigma, t)$ определяются в виде

$$D_k(\sigma, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M_k(\sigma, t, \Delta t)}{\Delta t} \quad (14)$$

$$M_k(\sigma, t, \Delta t) = \frac{1}{k!} \int (\tilde{\sigma} - \sigma)^k p(\tilde{\sigma}, t + \Delta t | \sigma, t) d\tilde{\sigma} \quad (15)$$

В этом разделе мы вычислим коэффициенты D_1 , D_2 и покажем, что остальные члены разложения равны нулю.

Для непосредственного вычисления моментов M_k условные плотности $p(\tilde{\sigma}, t + \Delta t | \sigma, t)$ были определены из эмпирических данных. Далее была осуществлена аппроксимация предельного перехода $\Delta t \rightarrow 0$ (этот вопрос обсуждается ниже), и из (14) получены коэффициенты $D_{1,2}$ и $D_4 = 0$. Согласно теореме Пуулы [18], если $D_4 = 0$, разложение управляющего уравнения (13) содержит только два первых ненулевых члена и принимает вид уравнения Фоккера-Планка.

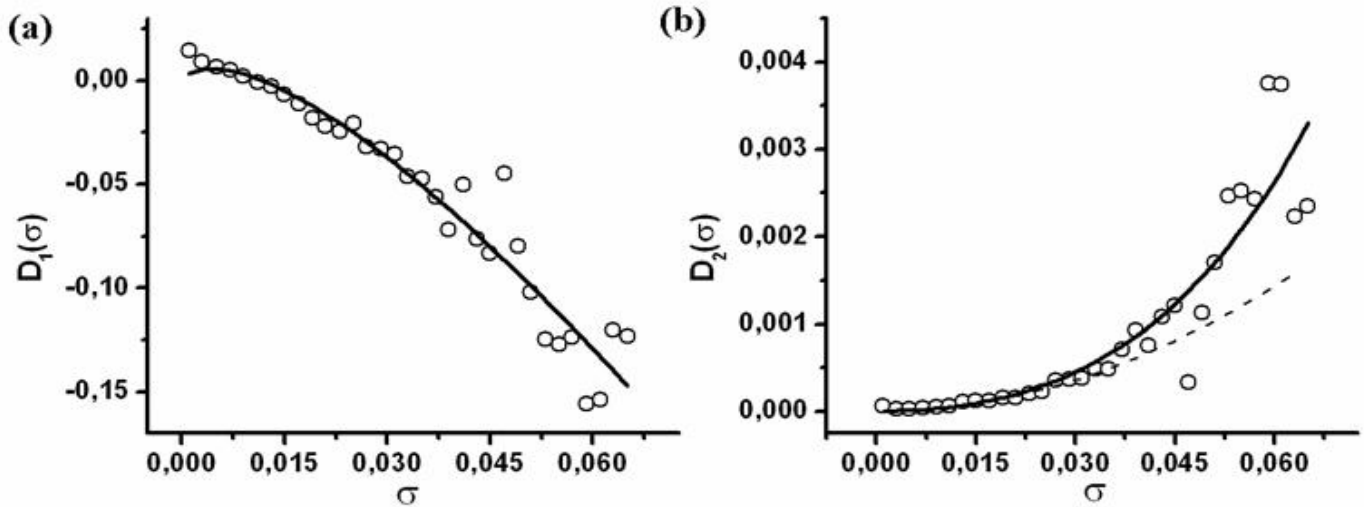


Рис.3 Коэффициенты $D_{1,2}(\sigma, t)$ получены из эмпирических данных с использованием (14) (кривые из кружков). Сплошными линиями выполнена аппроксимация. Пунктирная линия показывает квадратичную зависимость D_2 от σ .

Оказалось, что коэффициент дрейфа $D_1(\sigma)$ достаточно хорошо может быть аппроксимирован функцией $\sigma(a_1 - a_2 \ln \sigma)$, которая по форме совпадает дрейфовым членом экспоненциальной модели Орнштейна-Уленбека (4) (рис.3а). Отметим, что в коэффициентах отсутствует зависимость от t , поскольку волатильность рассматривается как стационарный процесс.

При малых значениях σ коэффициент $D_2(\sigma)$ может быть аппроксимирован квадратичной зависимостью, но при больших σ он возрастает быстрее, чем квадратичная функция (рис.3б). Для аппроксимации коэффициента D_2 во всей области изменения σ использовалась функция:

$$D_2(\sigma) = b_1 \sigma^2 \exp(b_2 \sigma) \quad (16)$$

В результате были получены следующие зависимости для коэффициентов $D_{1,2}(\sigma)$:

$$D_1(\sigma) = -\sigma(5.88 + 1.32 \ln \sigma) \quad (17)$$

$$D_2(\sigma) = 0.342 \sigma^2 \exp(12.7 \sigma) \quad (18)$$

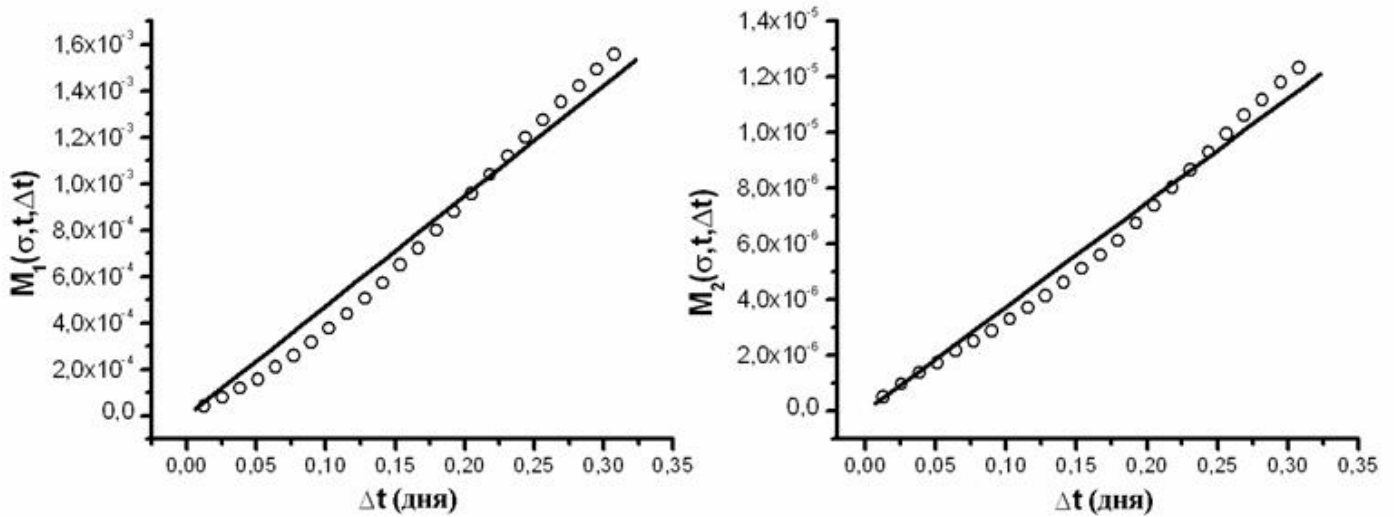


Рис.4 Зависимость моментов $M_{1,2}(\sigma, t, \Delta t)$ от Δt . $\sigma = 0,007$. Единицей измерения времени выбран 1 день (при расчете, что один рабочий день равен 6.5 часам).

Для вычисления предела (14) была исследована зависимость моментов $M_k(\sigma, t, \Delta t)$ от Δt , при $\Delta t < T$. Таким образом, в этом случае использовались перекрывающиеся интервалы усреднения в (8). Из рис.4 видно, что зависимость моментов $M_{1,2}$ от Δt линейна, когда значения σ малы, поэтому предел может быть аппроксимирован следующим образом:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M_k(\sigma, \Delta t)}{\Delta t} \approx \frac{M'_k(\sigma, \Delta t)}{\Delta t} \quad (19)$$

где $k=1,2$.

Для больших σ значения моментов сильно флуктуируют при $\Delta t < T$, это связано с уменьшением статистических данных при больших значениях волатильности. Тем не менее, и в этом случае предел (14) был аппроксимирован соотношением (19) при $\Delta t = T$.

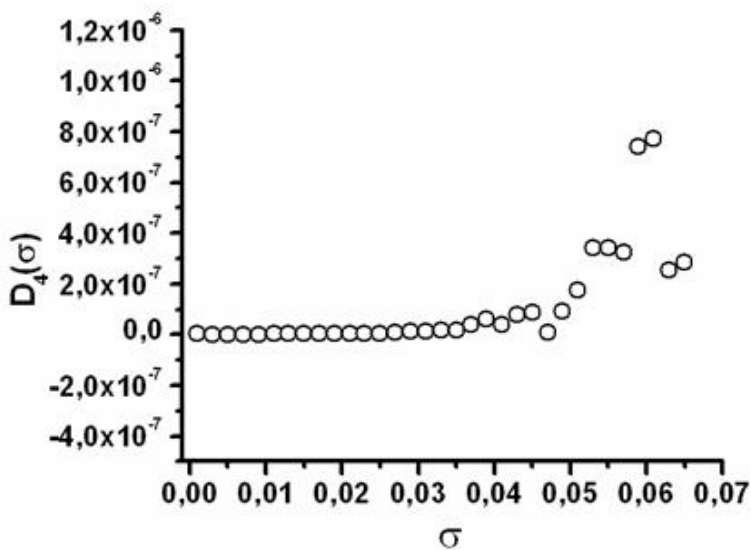


Рис.5 Коэффициент D_4 . Максимальные флуктуации не превышают $8 \cdot 10^{-7}$

Рассмотрим теперь коэффициент D_4 (рис.5). На рисунке видно, что коэффициент D_4 фактически равен нулю - флуктуации не превышают $8 \cdot 10^{-7}$, что на несколько порядков меньше соответствующих значений коэффициентов D_1 и D_2 . Следовательно, вероятностная плотность волатильности $p(\sigma, t)$ удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} p(\sigma, t) = \left\{ -\frac{\partial}{\partial \sigma} D_1(\sigma) + \frac{\partial}{\partial \sigma^2} D_2(\sigma) \right\} p(\sigma, t) \quad (20)$$

Уравнение Фоккера-Планка (20) было решено численно, в начальный момент времени значение волатильности было выбрано равным среднему значению за рассматриваемый период ($\sigma_0 = 0.01$).

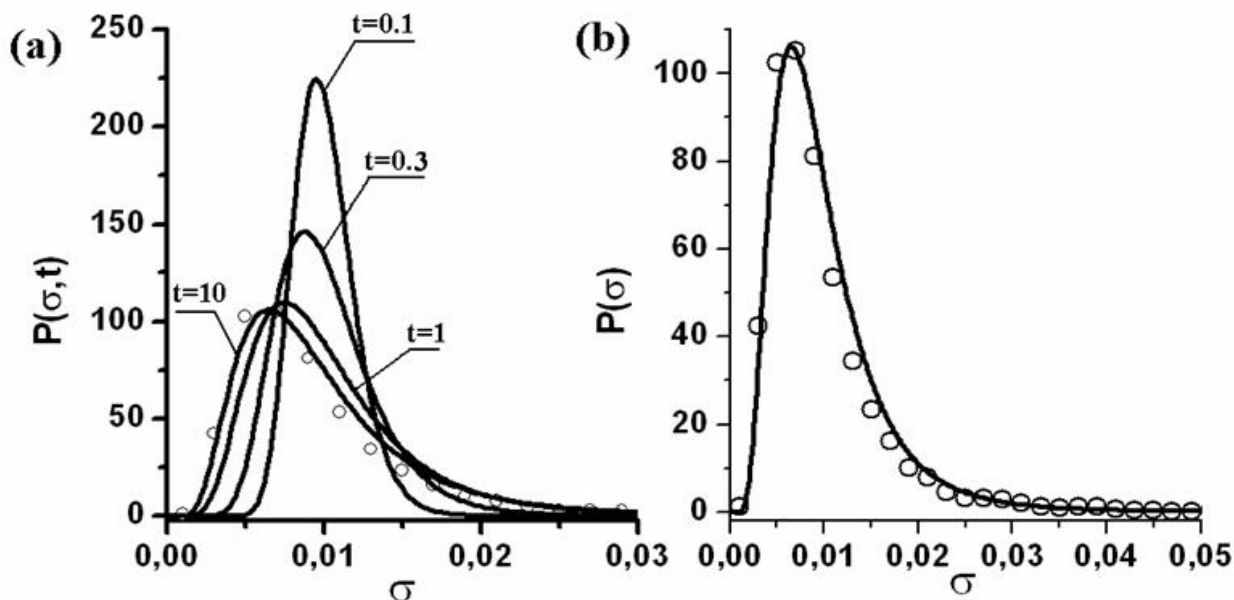


Рис.6: а) временная эволюция распределений волатильности $P(\sigma, t)$ для значений $t = 0.1; 0.3; 1$; и 10 дней. б) сплошная кривая соответствует теоретическому стационарному распределению волатильности (вычислено для $t=10$ дней). Кружки на графиках соответствуют эмпирическому распределению волатильности.

На рис.6а приведены графики распределений $P(\sigma, t)$ для различных моментов времени t . Начиная с $t \approx 1$ день происходит выход на стационарное распределение (теоретические кривые практически перестают изменяться). При этом полученное теоретическое стационарное распределение достаточно хорошо соответствует эмпирической плотности волатильности (рис.6б).

Уравнение Фоккера-Планка (20) соответствует следующему стохастическому дифференциальному уравнению [18]

$$d\sigma = D_1(\sigma)dt + \sqrt{2D_2(\sigma)}dW_2(t) \quad (21)$$

Данное уравнение с полученными в работе коэффициентами при малых σ сводится к уравнению

$$d\sigma = \sigma(\alpha_1 - \alpha_2 \ln \sigma)dt + \alpha_3 \sigma dW_2(t) \quad (22)$$

где $\alpha_1 = -5.88$; $\alpha_2 = 1.32$; $\alpha_3 = 1.17$.

Стохастическое дифференциальное уравнение (22) в точности соответствует уравнению для волатильности в экспоненциальной модели Орнштейна-Уленбека (4).

В отличие от других работ, в данной работе для построения модели стохастической волатильности не делалось никаких предположений относительно функциональной зависимости коэффициентов, уравнение для волатильности было выведено непосредственно из анализа эмпирических данных. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что эмпирические данные поддерживают экспоненциальную модель Орнштейна-Уленбека. Кроме того, в работе получено ее обобщение на случай больших значений волатильности.

Литература

1. Cont R. Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues // Quant. Finance, 2001, **1**, pp.223-236.
2. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986, 512с.
3. Scott L. Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation, and an Application // J. Fin. Quant. Anal., 1987, **22**, pp.419-438.
4. Stein E.M. and Stein J.C. Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach // Rev. Financial Studies, 1991, **4**, pp.727-752.
5. Heston S.L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options // Rev. Financial Studies, 1993, **6**, pp.327-343.
6. Hull J., White A. The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities // J. Finance, 1987, **XLII**, pp.281-300.
7. Dragulescu A., Yakovenko V.M. Probability distribution of returns in the Heston model with stochastic volatility // Quant. Finance, 2002, **2**, pp.443-453.
8. Бухбиндер Г.Л., Чистилин К.М. Описание российского фондового рынка в рамках модели Гестона. // Математическое Моделирование, 2005, **17**, №10, стр. 31-38.
9. Remer R., Mahnke R. Application of Heston model and its solution to German DAX data // Physica A, 2004, **344**, pp.236-239.
10. Perello J., Masoliver J. Random diffusion and leverage effect in financial markets // Phys. Rev.E, 2003, **344**.
11. Masoliver J., Perello J. A correlated stochastic volatility model measuring leverage and other stylized facts // Int. J. Theor. Appl. Fin., 2002, **5**, pp.5-41.
12. Perello J., Masoliver J., Anento N. A comparison between several correlated stochastic volatility models // Physica A, 2004, **314**, pp.134-137.
13. Wilmott P., Oztukel A. Uncertain parameters, an empirical stochastic volatility model and confidence limits // Int. J. Theor. Appl. Fin., 1998, **1**, pp.175-198.
14. Friedrich R., Peinke J., Renner Ch. How to quantify deterministic and random influences on the statistics of the foreign exchange market // Phys. Rev. Lett., 2000, **84**, pp.5224-5227.
15. Ivanova K., Ausloos M., and Takayasu H. Deterministic and stochastic influences on Japan and US stock and foreign exchange markets. A Fokker-Planck approach // arXiv:cond-mat/0301268.
16. Бухбиндер Г.Л., Чистилин К.М. Стохастическая динамика котировок акций РАО ЕЭС // Математическое Моделирование, 2005, **17**, №2, стр.119-125.
17. Engle R., Patton J. What good is a volatility model? // Quant. Finance, 2001, **1**, pp.237-245.
18. Risken H. The Fokker-Planck Equation, Springer, Berlin, 1984, p.472.

[1] Данные получены из <http://finance.yahoo.com>