

Wahrscheinlichkeitsrechnung

1. Geschichtliches

- A) Chevalier de Méré: „Geburtshelfer“ der Wahrscheinlichkeitsrechnung 1
- B) Blaise Pascal: Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung 1

2. Wahrscheinlichkeiten berechnen

- A) Festlegung von Wahrscheinlichkeiten 3
- B) Mehrstufige Zufallsversuche; Baumdiagramme 4
- C) Aufgaben zu Baumdiagrammen (mit Lösungen) 6
- D) Binomialverteilungen 11
- E) Aufgaben zu Binomialverteilungen (mit Lösungen) 14

3. Umkehraufgaben

- A) Einführung 19
- B) Erwartungswerte, Normbereiche, Standardabweichung 20
- C) Anzahl Versuche n gesucht 23
- D) Vertrauensintervall I für p gesucht 25
- E) Binomialtests (für p_0) 29

1. Geschichtliches

A) Chevalier de Méré:

„Geburtshelfer“ der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Spielsteine faszinieren seit Urzeiten. Zeigen Sie mir mein Schicksal? Bringen sie mir Glück? Wir versetzen uns in das 17. Jahrhundert, in die Zeit des Sonnenkönigs Louis XIV. Würfelspiele sind hoch im Kurs. Chevalier de Méré, ein französischer Lebemann, preist in den Salons sein Würfelspiel an.

1. Würfelspiel von de Méré:

„Wirf einen Würfel viermal. Wenn du eine Sechs würfelst, habe ich (de Méré) gewonnen, wenn du keine Sechs würfelst, hast du gewonnen!“

Chevalier de Méré lebte recht gut von seinem Spiel. Später erfand er ein neues Angebot.

2. Würfelspiel von de Méré:

„Wirf zwei Würfel 24-mal. Wenn du eine Doppelsechs würfelst, gewinne ich (de Méré), andernfalls gewinnst du.“

De Méré rechnete sich beim zweiten Spiel dieselben Gewinnchancen aus wie beim ersten. Seine Überlegung ging so:

1. Spiel: Die Chance für eine Sechs bei einem einzelnen Wurf beträgt $1:6$; bei vier Würfeln beträgt meine Gewinnchance also $4:6$ bzw. $2:3$.

2. Spiel: Die Chance für eine Doppelsechs bei einem einzelnen Wurf (mit zwei Würfeln) beträgt $1:36$; bei 24 Würfeln beträgt meine Gewinnchance also $24:36$ bzw. $2:3$.

Zur schmerzlichen Überraschung des Chevaliers verliess ihn seine Glückssträhne beim zweiten Spiel. Verzweifelt wandte er sich an das Universalgenie Blaise Pascal: „Ich verstehe die Welt nicht mehr!“ So ähnlich mag sein Brief begonnen haben, der leider nicht mehr erhalten blieb. Jedenfalls war sein Brief ein wichtiger Anstoss für die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

B) Blaise Pascal (1623-1662):

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Chevalier de Méré galt als geistreicher Mann (und als hemmungsloser Spieler), aber leider, so schrieb Pascal, „il n'est pas géomètre“ – er hat keine Ahnung von Geometrie.

Die „Geometrie“ idealer Würfel sollte so beschaffen sein, dass es keine Rolle spielt, ob ich Würfel A oder Würfel B werfe. Wenn ich zwei Würfe durchführen möchte, kann ich zweimal denselben Würfel benutzen oder ebensogut nach dem ersten Wurf den Würfel wechseln. Es kommt sogar aufs Gleiche raus, wenn ich zwei verschiedene Würfel *gleichzeitig* werfe. Insgesamt gibt es 36 gleichwahrscheinliche Wurfmöglichkeiten:

2. Wahrscheinlichkeiten berechnen

A) Festlegung von Wahrscheinlichkeiten

- Theoretische Festlegung

Die Wahrscheinlichkeiten gewisser Zufallsvorgänge können am Schreibtisch erfunden werden. Bei „idealen“ Würfeln soll jede Seite mit der Wahrscheinlichkeit $1/6$ auftreten; bei „idealen“ Münzen soll jede Seite mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ auftreten - auch wenn reale Würfel und Münzen nicht immer diesem Ideal entsprechen.

- Empirische bzw. experimentelle Festlegung

650 von 1000 befragten Personen befürworteten eine Gesetzesänderung. Ein Reissnagel wird 1000 mal geworfen und bleibt in 650 Fällen mit der Spitze nach oben liegen. Diese durch Befragungen oder Experimente festgestellten relativen Häufigkeiten (hier 65%) können als Wahrscheinlichkeiten (bzw. als Näherungswerte von Wahrscheinlichkeiten) aufgefasst werden. Je mehr Messdaten vorliegen, desto stabiler werden im Allgemeinen die relativen Häufigkeiten und desto genauer wird folglich der Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit des betrachteten Merkmals.

- Subjektive Festlegung

Die Bestimmung relativer Häufigkeiten ist auf wiederholbare Zufallsvorgänge angewiesen. Bei der Berechnung von Unfallrisiken eines Atomkraftwerkes oder eines neuen Flugzeugtyps ist man auf Schätzwerte von ExpertInnen angewiesen.

(Sie sind z.B. Experte oder Expertin für folgende Fragen: Mit welcher Wahrscheinlichkeit werde ich heiraten? Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für ausserirdisches Leben?) Subjektiv festgelegte Wahrscheinlichkeiten sind problematisch. Beispielsweise neigen viele Menschen dazu, bei Zufallsvorgängen mit zwei Ausgängen jeder Möglichkeit die Eintrittswahrscheinlichkeit 50% zuzuschreiben. Trotzdem: auch mit subjektiv festgelegten Wahrscheinlichkeiten kann gerechnet werden!

Eigentlich interessiert sich die Mathematik nicht dafür, wie Wahrscheinlichkeiten festgelegt werden, sondern nur dafür, wie mit Wahrscheinlichkeiten gerechnet wird.

Bei Zufallsvorgängen/Zufallsexperimenten werden Ereignisse beobachtet.

(Beispiel: Beim Würfeln ist das Werfen einer bestimmten Augenzahl ein „Elementarereignis“; das Werfen einer geraden Zahl ist ein „zusammengesetztes Ereignis“).

Wenn das Ereignis alle Elementarereignisse umfasst, wird es als sicheres Ereignis bezeichnet; die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses beträgt 1 bzw. 100%.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wird üblicherweise mit einem grossen P abgekürzt (P steht für Probabilité). In einer anschliessenden Klammer wird das Ereignis stichwortartig oder formelhaft beschrieben, z.B. $P(\text{gerade Zahl liegt oben}) = 50\%$.

Wenn alle Ergebnisse eines Zufallsversuches *gleichwahrscheinlich* sind, wird P durch

Abzählen berechnet:	$P(\text{Ereignis}) = \frac{\text{Anzahl günstige Ereignisse}}{\text{Anzahl mögliche Ereignisse}}$	(Sogenannte „Laplace-Wahrscheinlichkeit“)
---------------------	--	---

Neben dieser „kombinatorischen Methode“ sind vor allem die „Baumdiagramme“ hilfreich für das Verstehen der Regeln beim Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten.

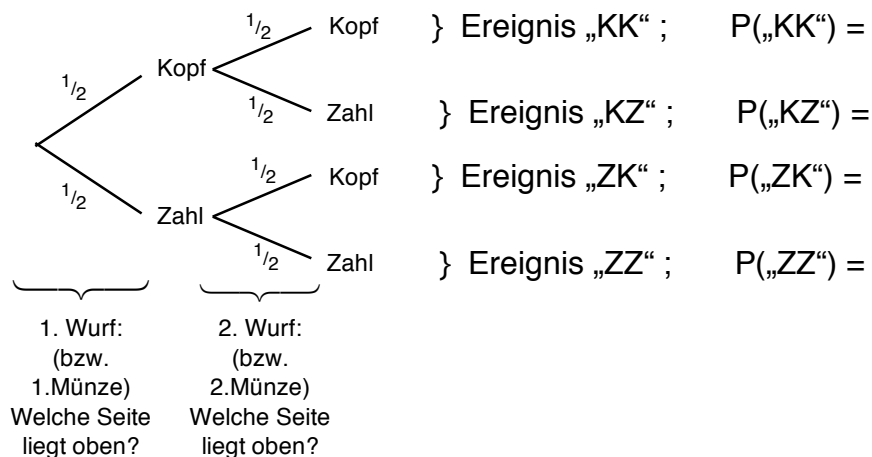
B) Mehrstufige Zufallsversuche; Baumdiagramme

- a) Zwei ideale Münzen werden gleichzeitig geworfen. Es gibt drei Wurfbilder:

A: beide zeigen Kopf ; B: Kopf und Zahl gemischt ; C: beide zeigen Zahl

Wie gross sind $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$? Vermutung? Experiment !?

- b) Eine ideale Münze wird zweimal geworfen. Veranschaulichung dieses Vorganges durch ein (horizontales) Baumdiagramm:



Bemerkungen

- Es spielt keine Rolle, ob zwei Münzen „gleichzeitig“ geworfen werden oder im zeitlichen Abstand einer Nanosekunde oder irgend einer anderen Zeiteinheit.
- Das zweimalige Werfen einer Münze und das gleichzeitige Werfen zweier Münzen kann mit dem gleichen Baumdiagramm analysiert werden. (Man stelle sich vor, die gleichzeitig geworfenen Münzen wären verschiedenfarbig; dann lassen sich „ZK“ und „KZ“ auseinander halten.)
- Baumdiagramme beschreiben *mehrstufige* Zufallsversuche und können horizontal oder vertikal gezeichnet werden. Die „Untersuchungsschritte“ liefern die Anzahl der Stufen des Baumes und die jeweils möglichen „Untersuchungsergebnisse“ liefern die Anzahl der Verzweigungen pro Stufe.

- c) Zwei Reissnägel werden geworfen. Die Wahrscheinlichkeit für „Spitze oben“ betrage 60%. Wie viele Wurfbilder lassen sich unterscheiden und wie häufig tritt jedes Wurfbild auf?

vertikales Baumdiagramm:

.....

.....

.....

.....

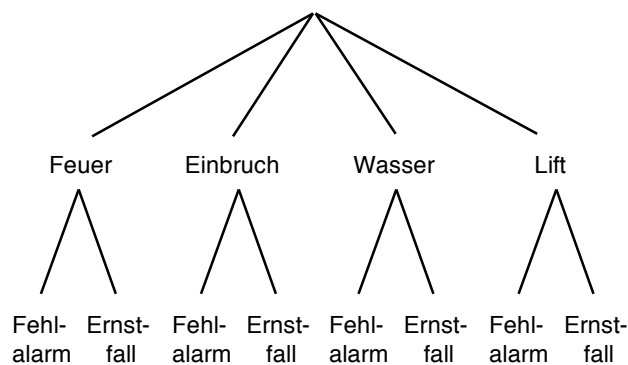
„Theoriebeispiel“

Ein Warenhausabwart wird jährlich etwa 100 mal alarmiert. Es handelt sich um rund 20 Feualarme, 40 Einbruchalarme und 30 Wasserbruchalarme. Die restlichen Alarme betreffen die Liftanlagen.

70% der Feualarme, 50% der Einbruchalarme, 60% der Wasserbruchalarme und 40% der Liftalarme sind Fehlalarme.

- (I) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der nächste Alarm von einem defekten Wassermelder stammt (also ein Fehlalarm ist)?
- (II) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der nächste Alarm ein Fehlalarm ist?
- (III) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der nächste Fehlalarm von einem defekten Feuermelder stammt?

(Vertikales) Baumdiagramm:



Untersuchungsschritte bzw. Fragestellungen:

Erste Fragestellung:
Welcher Alarmmelder ist aktiviert?

Zweite Fragestellung:
Funktioniert die Alarmanlage korrekt?

(I) $P(\text{Wasser und Fehlalarm}) = \dots\dots\dots$

(II) $P(\text{Fehlalarm}) = \dots\dots\dots$

(III) $P(\text{Feuer und Fehlalarm} / \text{Fehlalarm}) = \dots\dots\dots$

Bei einem Baumdiagramm kann jeder Ast als ein „Rohr“ angesehen werden, dessen Querschnitt proportional zur angeschriebenen Wahrscheinlichkeit ist.

Beim obersten Knoten wird eine Einheitsmenge Wasser (100%) eingegeben. Das Wasser verteilt sich bei jedem Knoten entsprechend den Wahrscheinlichkeiten der abzweigenden Äste und fliesst zuunterst wieder vollständig aus (100%, verteilt auf sämtliche Ausgänge).

Tipp:

Sie können in das Rohrsystem auch 100 Stück einfüllen statt 100 Prozent (z.B. 100 Alarme).

Pfadregeln



- Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller von einem Knoten ausgehenden Äste ist 100%.
- Die Summe der Wahrscheinlichkeiten sämtlicher Pfade (sämtlicher Ausgänge) ist auch 100%.
- Die W'keit eines Pfades ist gleich der W'keiten längs des Pfades.
- Die W'keit mehrerer Pfade ist gleich der W'keiten der einzelnen Pfade.

Wenn aufgrund einer sicheren Zusatzinformation (Zusatzbedingung) nicht mehr alle Pfade in Betracht kommen gilt stattdessen :

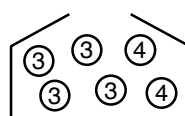
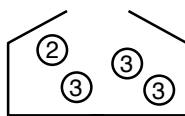
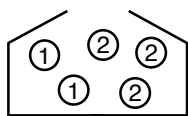
● Bedingte Wahrscheinlichkeit = $\frac{\text{Wahrscheinlichkeit der günstigen Pfade}}{\text{Wahrscheinlichkeit der noch möglichen Pfade}}$

C) Aufgaben zu Baumdiagrammen

- Aufg. 1) Angenommen, die Geburtstage der Menschen seien zu gleichen Teilen auf die 4 Jahreszeiten Frühling, Sommer, Herbst, Winter verteilt.
- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass *eine* zufällig ausgewählte Person entweder im Sommer oder im Winter Geburtstag hat?
 - b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von *zwei* zufällig ausgewählten Personen beide im Frühling Geburtstag haben?
 - c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von *drei* zufällig ausgewählten Personen alle in derselben Jahreszeit Geburtstag haben?
- Aufg. 2) a) Ein Airbag funktioniert in 92% aller Testversuche. Wie gross ist die W'keit, dass beide in einem Auto eingebauten Airbags im Ernstfall funktionieren?
- b) Ein Auto hat zwei voneinander unabhängige Bremskreise. Der eine funktioniert in 99.5%, der andere in 99.8% aller Bremstests. Mit welcher Wahrscheinlichkeit versagen beide Bremskreise gleichzeitig?
- Aufg. 3) Bei der Massenproduktion von Computerchips ist meist ein grosser Teil Ausschuss. Damit ein Chip fehlerfrei funktioniert, darf er weder „Punktfehler“ (Staubverunreinigungen) noch „Toleranzfehler“ (ungenauere Lötstellen) enthalten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dies der Fall, wenn die beiden Fehlerarten zufällig und unabhängig voneinander bei 10% (Punktfehler) und 20% (Toleranzfehler) aller Chips auftreten?
- Aufg. 4) In einer Schachtel befinden sich 70 Schrauben mit Linksgewinde und 30 Schrauben mit Rechtsgewinde. In einer zweiten Schachtel befinden sich die zugehörigen Muttern in entsprechender Anzahl. Aus den Schachteln wird je eine Schraube und eine Mutter zufällig entnommen. Mit welcher W.k. passen sie zusammen?
- Aufg. 5) Von 100 glasierten Blumenvasen weisen durchschnittlich 5 Vasen nach dem Brennen Farbfehler auf und 8 Vasen Materialfehler (Risse etc.). Beide Fehlerarten entstehen unabhängig voneinander. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Vase
- a) fehlerfrei ist?
 - b) Sowohl Farbfehler als auch Materialfehler aufweist?
- Aufg. 6) Das Ablesegerät bei einer Ladenkasse macht auf 400 Ablesevorgänge durchschnittlich einen Ablesefehler. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Ablesefehler, wenn Sie
- a) 2 Artikel eingekauft haben?
 - b) 100 Artikel eingekauft haben?
- Aufg. 7) Einem Augenchirurgen unterläuft durchschnittlich ein „Kunstfehler“ auf 500 Operationen. Ein computergesteuerter Operationsroboter soll angeblich 100 mal zuverlässiger arbeiten (1 Fehler auf 50'000 Operationen). Im Augenspital werden jährlich 200 derartige Operationen durchgeführt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass
- a) der Chirurg ,
 - b) die Maschine 200 Operationen fehlerfrei durchführt?
- Aufg. 8) Die Wahrscheinlichkeit einer Kernschmelze im Laufe von 25 Betriebsjahren wird bei modernen Atomreaktoren auf 1:40'000 geschätzt. Gegenwärtig (2011) sind weltweit 438 Reaktoren in Betrieb. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich bei *irgend* einem von 438 Reaktoren im Laufe von 25 Betriebsjahren (mindestens) eine Kernschmelze ereignet?

- Aufg. 9) Auf einem Kellerregal stehen 13 Konfitüregläser. 9 Gläser enthalten Brombeeren, 3 enthalten Johannisbeeren und eines enthält Himbeeren. Jemand wählt im Dunkeln zwei Gläser zufällig aus. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Gläser dieselbe Konfitürensorte enthalten?
- Aufg. 10) In einer Waschmaschine werden 6 blaue und 4 grüne Leintücher gewaschen. Sie entnehmen nach dem Schwingen – ohne hineinzuschauen – zwei Leintücher. Wie gross ist die W'keit, dass Sie verschiedenfarbige Tücher herausgezogen haben?
- Aufg. 11) An einer Tombola werden 100 Lose verkauft, 20 erzielen einen Gewinn.
- Sie kaufen die ersten 3 Lose. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines gewinnt?
 - Sie kaufen die letzten 3 Lose. Ändert dies Ihre Gewinnchancen?
- Aufg. 12) Wie gross ist die W'keit, beim dreimaligen Werfen eines idealen Würfels
- genau eine Eins zu erzielen?
 - mindestens zwei Sechser zu erzielen?
- Aufg. 13) Was ist wahrscheinlicher: Mit zwei idealen Würfeln die Punktesumme 4 oder die Punktesumme 5 zu werfen?
- Aufg. 14) Amor verschießt drei Liebespfeile. Beim ersten Schuss beträgt seine Trefferwahrscheinlichkeit 50%. Trifft er, so steigt seine Treffsicherheit jeweils um 0.05 (z.B. von 50% auf 55%); schießt er daneben, so sinkt sie jeweils um 0.05. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Amor...
- dreimal trifft?
 - zweimal trifft?
- Aufg. 15) Sie drehen zuerst Glücksrad A:  und anschliessend B: .
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse?
- E₁: Genau eine der beiden Zahlen ist eine Primzahl.
E₂: Höchstens eine der beiden Zahlen ist ungerade.
E₃: Die Summe der beiden Zahlen ist zweistellig.
- Aufg. 16) Egon hat die Angewohnheit, benützte Streichhölzer in die Streichholzschachtel zurückzulegen. In jeder Zigarettenpause entnimmt er der Schachtel ein einziges Streichholz ohne hineinzuschauen. Zur Zeit befinden sich in seiner Schachtel 3 ungebrauchte und 3 verbrauchte Hölzer. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann er sich (in Anbetracht seiner Angewohnheit) in den beiden folgenden Pausen genau eine Zigarette anzünden?
- Aufg. 17) Der Kühlmitteldruck eines Atomkraftwerks wird dreifach gemessen. Jeder Messfühler funktioniert mit 99.96% Zuverlässigkeit. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei der drei Messfühler einen Ueberdruck richtig weitermelden und dadurch eine Reaktorschnellabschaltung auslösen? (Eine Ueberdruckmeldung allein bewirkt noch keine automatische Schnellabschaltung!)

Aufg. 18) Sie ziehen blind aus jeder der drei folgenden Urnen je eine Zahl:



- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie zwei gleiche Zahlen ziehen?
- b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie zwei gleiche Zahlen gezogen haben, wenn Ihnen mitgeteilt wird, dass die Summe der drei gezogenen Zahlen Sieben beträgt?

Aufg. 19) 8% aller Männer, aber nur 0.5% aller Frauen leiden unter Rotgrünblindheit. Eine Frau und ein Mann werden zufällig ausgewählt.

- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide unter Rotgrünblindheit leiden?
- b) Aus irgendeiner Reaktion wird klar, dass mindestens eine der beiden Personen rot und grün nicht unterscheiden kann. Wie gross ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass beide unter Rotgrünblindheit leiden?

Aufg. 20) 1996 kamen $\frac{2}{3}$ aller in der Schweiz konsumierten Weine aus dem Ausland. 87% der importierten und 44% der einheimischen Weine waren Rotweine. Monsieur Rouge kaufte 1996 eine Kiste Rotwein, ohne die Etikette zu beachten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelte es sich um einheimischen Wein?

Aufg. 21) 92% aller SkifahrerInnen, die von einer Lawine vollständig verschüttet werden, überleben die ersten 15 Minuten nach der Verschüttung. Nach 90 Minuten beträgt die Überlebenschance noch 30%, nach 130 Minuten sind es nur noch 3%.

- a) Eine verschüttete Person wird nach 90 Minuten lebend geborgen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hätte sie die nächsten 40 Minuten nicht mehr überlebt?
- b) Eine verschüttete Person wird nach 90 Minuten tot geborgen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie die ersten 15 Minuten überlebt?

Aufg. 22) 9% der Bevölkerung leiden an einer bestimmten Allergie. Ein Allergietest zeigt bei 90% dieser Allergiker ein positives Resultat. Irrtümlicherweise reagiert er auch bei 0.9% der Nichtallergiker positiv.

Eine zufällig ausgewählte Person wird getestet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit...

- a) ... erzielt die Versuchsperson ein positives Resultat?
- b) ... ist sie – wenn der Test positiv ausfällt – trotzdem gesund?

Aufg. 23) Beim Glukosetoleranztest gibt die Ärztin dem Patienten eine bestimmte Menge Zuckerwasser zu trinken und prüft nach einer kurzen Wartezeit die Blutzuckerwerte. Die sogenannte Sensitivität des Testes beträgt 72%; d.h. bei Personen, die an Diabetes erkrankt sind, reagiert der Test in 72% der Fälle (richtigerweise) „positiv“. Die sogenannte Spezifität des Testes beträgt 73%, d.h. bei Personen, die nicht an Diabetes erkrankt sind, zeigt der Test in 73% der Fälle (richtigerweise) keine Reaktion (d.h. eine „negative“ Reaktion).

Etwa 1 % der Bevölkerung ist an Diabetes erkrankt und weiss nichts von der Tatsache dieser Erkrankung. Der Test ist für diese Bevölkerungsgruppe gedacht.

- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Diabetes tatsächlich vorliegt, wenn der Test positiv ausfällt?
- b) Für welche PatientInnen ist dieser Test wertvoll, für welche ist der Test wertlos?

- Aufg. 24) Die Wahrscheinlichkeit, dass jemand ohne spezifische Symptome an Mastdarmkrebs leidet, liegt bei 0.3%. Das entspricht 300 Kranken unter 100'000 Menschen. Bei einem gebräuchlichen Test zur Frühdiagnose des „Rektumkarzinoms“ beträgt die W.k. für falsch positive Testergebnisse 3% und für falsch negative 50%. Angenommen, es würden sich 100'000 Menschen ohne spezifische Symptome diesem Test zur Krebsvorsorge unterziehen. Einige dieser Menschen erhalten ein positives Testergebnis und müssen die zum Teil unangenehmen Folgeuntersuchungen über sich ergehen lassen. Bei wie vielen Menschen „lohnen“ sich diese Folgeuntersuchungen?
- Aufg. 25) Etwa 15 von 10'000 Frauen, die eine Mammographie (Brustkrebs–Vorsorgeuntersuchung) durchführen lassen, weisen effektiv Brustkrebs auf. Jeder 10. Fall von Brustkrebs wird bei der Mammographie übersehen, ist also „falsch negativ“. „Falsch positive“ Befunde kommen sehr selten vor, die Rate beträgt bei erfahrenen Gynäkologinnen lediglich 0.27%. Jeder positive Befund hat eine Biopsie (Gewebeentnahme) zur Folge! Zeigen Sie, dass trotz der relativen Sicherheit der Untersuchungsergebnisse rund $\frac{2}{3}$ aller Biopsien an gesunden Frauen durchgeführt werden!
- Aufg. 26) Aus 2 grünen und 4 blauen Nespressokapseln werden 6 Tassen Kaffee hergestellt.
- Sie wählen blind zwei Tassen aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthalten beide Tassen dieselbe Sorte Kaffee?
 - Sie wählen blind zwei Tassen aus und erraten mit verbundenen Augen, ob es sich um dieselbe Sorte Kaffee handelt oder um verschiedene Sorten. Ihre Treffsicherheit für eine richtige Antwort beträgt 60%, wenn die Sorten gleich sind und 75%, wenn sie verschieden sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit antworten Sie richtig?
- Aufg. 27) In einem Hühnerhaus liegen 3 Gipseier und 6 richtige Eier. Eine unerfahrene Hilfskraft wählt zufällig zwei Eier aus und legt sie unter die Brutlampe.
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein richtiges Ei unter der Lampe liegt?
 - Die Wahrscheinlichkeit, dass aus einem (richtigen) Hühnerei ein Hühnchen schlüpft, betrage 24% (und 76%, dass ein Hähnchen oder gar nichts schlüpft). Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass aus den beiden zufällig ausgewählten Eiern mindestens ein Hühnchen schlüpft?

Lösungen

1. a) $1/2$ b) $1/16$ c) $1/16$ 2. a) 84.6% b) 0.00001
3. 72% 4. 58%
5. a) 0.874 b) 0.004 6. a) $\approx 0.5\%$ b) 22.1%
7. a) $\approx 67\%$ b) $\approx 99.6\%$ 8. $\approx 1\%$
9. 50% (Urnenmodell) 10. $53^{1/3}\%$ (Urnenmodell)
11. a) 49.2% (Urnenmodell! Das ungenauere Glücksradmodell liefert 48.8%.)
b) Die erste Käuferin kann 3 Lose auswählen (und kaufen) oder ebensogut 97 Lose auswählen und die übrig-
gebliebenen Lose kaufen. Beide Chancen sind gleich gross, vorausgesetzt, dass keine Informationen über
die 97 bereits verkauften Lose vorliegen!
12. a) $25/72$ b) $2/27$ 13. Summe 5 ist wahrscheinlicher!
(4 von 36 Mögl. statt nur 3 von 36 Mögl.)
14. a) 16.5% b) 33.5%
15. E_1 : $1/2$ E_2 : $3/4$ E_3 : $5/16$ 16. $7/12$
17. 0.999'999'5 18. a) 65% b) 90%
19. a) 0.0004 b) 0.0047 20. 20.2%
21. a) 90% b) 88.6% 22. a) 8.9% b) 9.2%
23. a) 2.6% b) Für Personen mit positivem Testresultat ist der Test wertlos (die Wahrscheinlichkeit, dass
sie krank sind, beträgt bloss 2.6%)! Personen mit negativem Resultat sind jetzt zu 99.6%
sicher (statt nur 99% wie vor dem Test), dass sie gesund sind. Dieser Test ist überflüssig!
24. Bei ca. 150 (von den 3141 positiv Getesteten)
25. 0.6663 (Tipp: Nicht von 100% ausgehen, sondern von 10'000 Frauen)
26. a) $7/15$ b) 68% 27. a) $11/12$ b) 29.6%

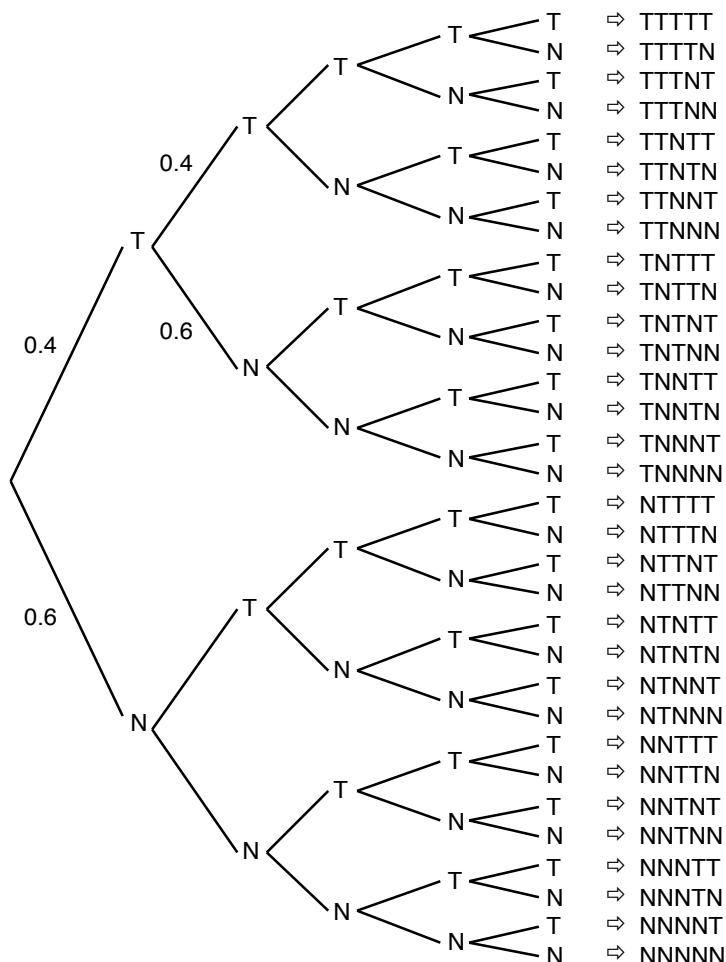
D) Binomialverteilungen, Theorie

Mehrstufige Zufallsversuche, bei denen die Wahrscheinlichkeiten von Stufe zu Stufe nicht ändern (Unabhängigkeit der Ereignisse), können mit dem Drehen eines Glücksrades mit zwei Sektoren (T für Treffer, N für Nieten) verglichen werden.

Das einmalige Drehen eines Glücksrades mit zwei Sektoren heisst Bernoulli'-Versuch. Die zu einem n-stufigen Bernoulli-Versuch mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p gehörige Verteilung der Wahrscheinlichkeiten (für 0,1,2,...,n Treffer) heisst **Binomialverteilung mit den Parametern n und p**.

Viele Zufallsversuche lassen sich als mehrstufige Bernoulli-Versuche auffassen. Beispiel: 40 Prozent der Bevölkerung hat Blutgruppe 0. Fünf Personen werden zufällig ausgewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau drei Personen Blutgruppe 0 aufweisen?

Diese Situation lässt sich durch ein Glücksrad simulieren, das 5-mal gedreht wird; ein Treffer mit der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0.4$ entspricht einer Person mit Blutgruppe 0.


$$P(\text{Trefferzahl}=3) = ?$$

Die Hauptschwierigkeit besteht offensichtlich darin, alle Pfade (mit drei Treffern) zu finden. In unserem Beispiel können wir sie noch von Hand auszählen.

Allgemein stellt sich jedoch bei einem n -stufigen Versuch die Frage: Wie viele „Wörter“ aus den beiden Buchstaben T und N gibt es, wenn der Buchstabe T in x -facher Wiederholung auftritt und der Buchstabe N die restlichen Plätze besetzt, also $(n-x)$ -mal vorkommt?

¹ Jakob Bernoulli (1654 - 1705), Basler Mathematiker, Mitbegründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ein wenig Kombinatorik

- 1) Wie viele „Wörter“ kann man aus dem Wort „BASEL“ durch Umstellen der Buchstaben erzeugen?

Antwort: Es gibt 5 Möglichkeiten für den ersten Buchstaben, noch vier Möglichkeiten für den zweiten Buchstaben, noch drei für den dritten, noch zwei für den vierten und nur noch eine Möglichkeit für den fünften Buchstaben. Also $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ „Wörter“.

Allgemein: n Elemente kann man auf $n!$ (lies „**n-Fakultät**“) Arten permutieren (d.h. vertauschen oder anordnen).

- 2) Wie viele „Wörter“ kann man aus dem Wort „AARAU“ erzeugen?

Antwort: Weil es 5 Buchstaben hat, gäbe es $5! = 120$ Anordnungen, wenn man die drei A unterscheiden könnte. Die drei A lassen sich auf $3! = 6$ Arten austauschen, ohne dass sich das Wort akustisch ändert. D.h. jedes Wort ist in sechsfacher Ausführung vorhanden!

Also gibt es nur $\frac{5!}{3!} = 20$ unterscheidbare „Wörter“.

- 3) Wie viele „Wörter“ kann man aus dem Wort „AUSSERFERRERA“ erzeugen?

Antwort: Es sind 13 Buchstaben, wobei der Buchstabe A 2-mal, S 2-mal, E 3-mal und R 4-mal vorkommt.

Also gibt es $\frac{13!}{2! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4!} = 10'810'800$ unterscheidbare „Wörter“.

- 4) Wie viele „Wörter“ kann man aus dem Wort „TTTNN“ erzeugen?

Antwort: Es sind $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ „Wörter“.

Bei einem 5-stufigen Bernoulli-Versuch gibt es also 10 Pfade mit drei Treffern.

Jeder dieser 10 Pfade hat die gleiche Wahrscheinlichkeit, nämlich $0.4^3 \cdot 0.6^2 = 0.023$.

Also gilt: $P(T=3) = 10 \cdot 0.023 = 0.23 = 23\%$.

Allgemein: Beim n -stufigen Bernoulliversuch gibt es $\frac{n!}{x! \cdot (n-x)!} = \binom{n}{x}$ Pfade mit x Treffern.

Der Ausdruck $\binom{n}{x}$ (lies „**n über x**“) heisst **Binomialkoeffizient**.

Merke: $0! = 1$ und $1! = 1$, somit ist $\binom{n}{0} = 1$ und $\binom{n}{1} = n$.

- a) Berechnen Sie nun die Wahrscheinlichkeiten für die übrigen Trefferzahlen!
Vierstellige „Genau-Tabelle“ für $n=5$ und $p=0.4$:

P(T=0)	P(T=1)	P(T=2)	P(T=3)	P(T=4)	P(T=5)
			0.2304		

- b) Stellen Sie die Tabelle als Säulendiagramm dar!

Zusammenfassung

Die Wahrscheinlichkeit, bei einem n -stufigen Bernoulli-Versuch mit der Trefferwahrscheinlichkeit p genau x Treffer zu erzielen, beträgt:

$$P(T=x) =$$

wobei $q = 1 - p$

Beachten Sie die Schreibweise: $T=x$ ist ein Ereignis, nämlich genau x Treffer zu erzielen (beim n -maligen Drehen des Glücksrades), und $P(T=x)$ ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.

Oft interessiert die Frage: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass *höchstens* x Treffer erzielt werden? Formal also: $P(T \leq x) = ?$

Wegen $P(T \leq x) = P(T=0) + P(T=1) + P(T=2) + \dots + P(T=x)$ sind solche Aufgaben meistens sehr rechenintensiv. Deshalb verwendete man früher für „Höchstens-Wahrscheinlichkeiten“ Tabellen mit häufig benutzten Werten von n und p .

Beim Taschenrechner TI-84 finden Sie im Menü *Distr* die Befehle:

$\text{binompdf}(n,p,x)$ für die „Genauwahrscheinlichkeit“ $P(T=x)$ und

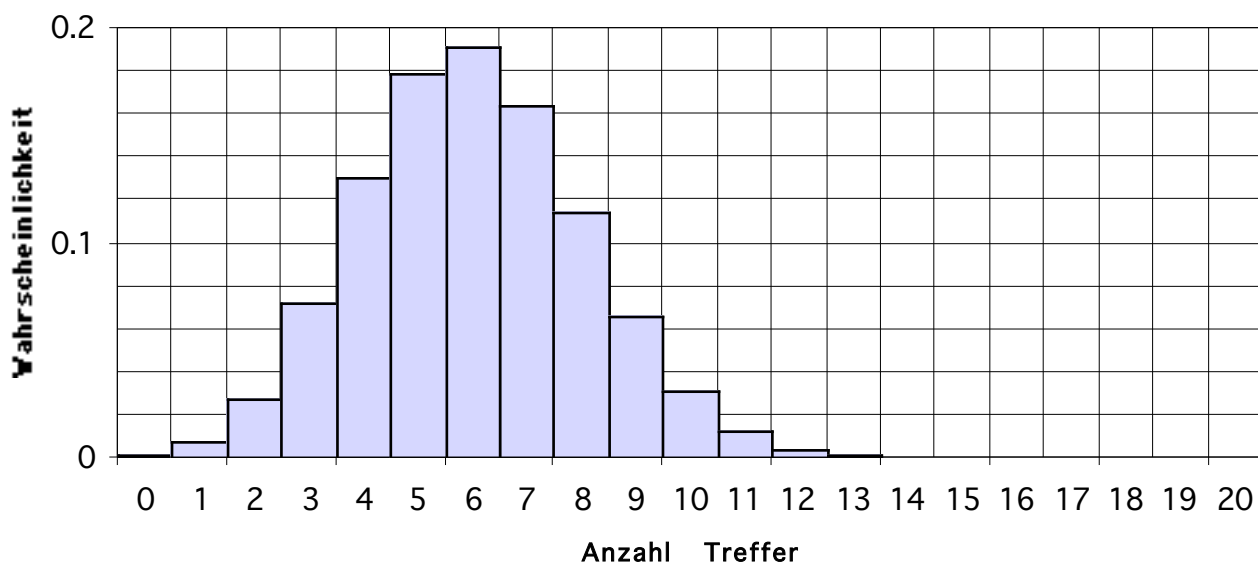
$\text{binomcdf}(n,p,x)$ für die „Höchstenswahrscheinlichkeit“ $P(T \leq x)$.

Der TI-89 verfügt in seinem Statistik-Paket über einen noch bequemeren Befehl:

$\text{binomcdf}(n,p,x_L,x_R)$ berechnet die Bereichswahrscheinlichkeit $P(x_L \leq T \leq x_R)$.

Die „binompdf-Tabelle“ bzw. ihre grafische Darstellung heisst Binomialverteilung mit den Parametern n und p .

Binomialverteilung für $n=20$ und $p=0.3$



E) Aufgaben zu Binomialverteilungen

(„Standardaufgabe“: gegeben sind n , p und der Trefferbereich
gesucht ist die Wahrscheinlichkeit des Trefferbereiches)

Aufg. 1) $n=5$, $p=0.4$:

„Genau-Tabelle“:

„Höchstens-Tabelle“:

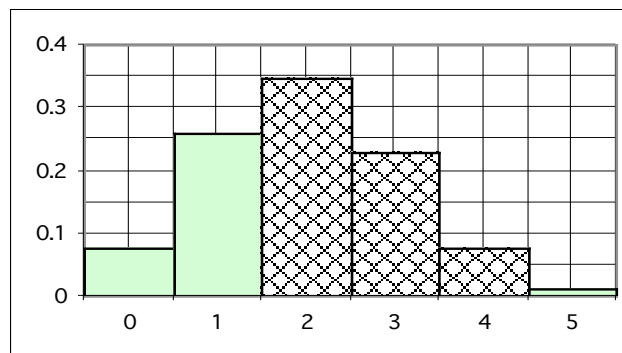
X	P(T=X)
0	0.078
1	0.259
2	0.346
3	0.230
4	0.077
5	0.010

X	P(T≤X)
0	0.078
1	
2	
3	
4	
5	

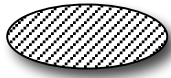
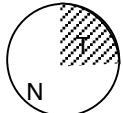
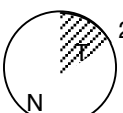


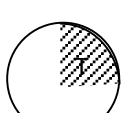

Wie gross ist die W'keit für folgende Trefferbereiche:	Lösung mit "Genau-Tabelle" bzw. mit <code>binompdf()</code> :	Lösung mit "Höchstens-Tabelle" bzw. mit <code>binomcdf()</code> :
a) genau 2 Treffer	$P(T=2) =$	$P(T=2) =$
b) höchstens 2 Treffer		
c) mindestens 2 Treffer		
d) mindestens 2, aber höchstens 4 Treffer		
e) genau 2 Nieten		

Tipps zur Anwendung von Tabellen und Statistik-Taschenrechnern:

- Stellen Sie sich die „Genau-Tabelle“ grafisch vor!
- Schraffieren Sie (gedanklich) den gefragten Trefferbereich.
Bsp. Trefferbereich von $x_L=2$ bis $x_R=4$:



- Kernidee für „Genau-Tabellen“ bzw. für „`binompdf()`“:
Alle schraffierten Wahrscheinlichkeiten zusammenzählen!
- Kernidee für „Höchstens-Tabellen“ bzw. für „`binomcdf()`“ des TI-84:
Alles bis x_R minus den unerwünschten Bereich links von x_L !
→ TI-89: `binomcdf(n,p, x_L , x_R)` berechnet $P(x_L \leq T \leq x_R)$ in einem Schritt!

- Aufg. 2) 10% aller Kopfsalate eines Salattfeldes haben einen zu hohen Nitratgehalt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 15 zufällig herausgegriffenen Salatköpfen...
a) genau 3 b) genau 4 c) höchstens 4 d) mindestens 4
einen zu hohen Nitratgehalt aufweisen?
- Aufg. 3) Ein Versandhaus muss bei 15% aller Rechnungen Mahnungen verschicken. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Zufallsstichprobe von 10 Rechnungen...
a) genau 3 b) genau 6 c) zwischen 3 und 6
säumige KundInnen enthalten sind? („Zwischen“ bedeute hier: $3 \leq X \leq 6$).
- Aufg. 4) Eine seltene Pflanze ist schwierig zu züchten. Durchschnittlich keimt jedes fünfte Samenkorn. Wie gross ist die Chance, dass mindestens ein Same keimt, wenn ich
a) 10 Samen b) 20 Samen c) 25 Samen setze?
- Aufg. 5) Eine Blumenhandlung gibt für ihre Blumenzwiebeln eine 90%-Keimgarantie. Jemand kauft 20 Zwiebeln. Mit welcher Wahrscheinlichkeit keimen
a) alle b) mindestens 90% der gekauften Zwiebeln?
- Aufg. 6) Bei Meinungsumfragen werden erfahrungsgemäss nur etwa $3/4$ der ausgewählten Personen angetroffen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden
a) von 50 ausgewählten Personen mehr als 40 angetroffen?
b) von 100 ausgewählten Personen höchstens 70 angetroffen?
- Aufg. 7) a)  Münze: Wie gross ist die W.k. für 3 mal Kopf, wenn
 $n = 5$; $n = 6$; $n = 10$?
- b)  Glücksrade: Wie gross ist die W.k. für 3 Treffer, wenn
 $n = 5$; $n = 6$; $n = 10$?
- c)  20% Das Glücksrade wird 10 mal gedreht. Wie gross ist W.k. für
1 Treffer ; 2 Treffer ; 5 Treffer ?
- d)  p% Ein Glücksrade mit Treffer-W.k. p% wird 20 mal gedreht.
Wie gross ist die W.k. für *höchstens* fünf Treffer, wenn
 $p = 10\%$; $p = 20\%$; $p = 50\%$?
- e)  p% Ein Glücksrade mit Treffer-W.k. p% wird 20 mal gedreht.
Wie gross ist die W.k. für *mindestens* fünf Treffer, wenn
 $p = 10\%$; $p = 20\%$; $p = 1/3$?
- f)  Das Glücksrade wird 50-mal gedreht. Wie gross ist die W.k. für
höchstens ; mindestens ; genau 10 Treffer?
- g)  Die Münze wird 100-mal geworfen, X mal erscheint Kopf.
Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:
 $P(X < 50)$ $P(50 \leq X \leq 55)$ $P(50 < X < 55)$

- Aufg. 8) Eine Elektronikfirma erhält eine grosse Lieferung integrierter Schaltungen. Sie überprüft eine Stichprobe von 10 Schaltungen und weist die Sendung zurück, wenn zwei oder mehr Schaltungen Fehler aufweisen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit weist die Firma die Lieferung zurück, wenn der Anteil der fehlerhaften Schaltungen beträgt ?
 a) 1% b) 5% c) 10% d) 15%
- Aufg. 9) Bei der Herstellung eines elektronischen Bauteils entstehen im Mittel 10% Ausschuss, 30% Produkte zweiter und 60% Produkte erster Wahl. 20 zufällig ausgewählte Bauteile werden kontrolliert. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass...
 a) höchstens 1 Bauteil Ausschussware darstellt?
 b) mindestens 4 Bauteile zweiter Wahl herausgegriffen wurden?
 c) mehr als die Hälfte der 20 Bauteile erstklassig sind?
- Aufg. 10) Ein idealer Würfel wird 10-mal geworfen. Wie gross sind die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
 a) Bei genau 6 Würfeln werden Zahlen geworfen, die genau den Wert 6 aufweisen.
 b) Bei mindestens 5 Würfeln werden Zahlen geworfen, die mindestens 5 betragen.
 c) Bei höchstens 4 Würfeln werden Zahlen geworfen, die höchstens 4 betragen.
- Aufg. 11) 85% der Schweizer Bevölkerung sind Rhesus positiv, 15% sind Rhesus negativ. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stichprobe von 20 Personen...
 a) ... genau 15% aller Personen Rhesus negativ sind?
 b) ... mindestens zwei Drittel aller Personen Rhesus positiv sind?
- Aufg. 12) 85% aller Energiesparlampen eines bestimmten Typs brennen länger als 6000 Stunden. Sie kaufen 6 Energiesparlampen dieses Typs. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass...
 a) alle 6 Lampen b) genau 4 Lampen c) mindestens 4 Lampen länger als 6000 Stunden brennen?
- Aufg. 13) Ein Multiple-Choice-Test besteht aus 50 Aufgaben; jeweils nur eine von 5 Antworten ist richtig. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man durch blosses Raten
 a) mindestens 10 b) mindestens 15 Fragen richtig beantworten?
 c) Bei wie vielen richtigen Antworten würden Sie die Note 1 festlegen?
- Aufg. 14) In der Kantine einer Firma nehmen durchschnittlich 60 der 100 Angestellten ihr Mittagessen ein. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden an einem Stichtag
 a) mehr als 50 b) weniger als 50 Personen in der Kantine essen?
- Aufg. 15) In den Hauptreisezeiten werden die angebotenen Reisen vom Veranstalter häufig überbucht, d.h. es werden mehr Plätze verkauft als tatsächlich vorhanden sind. Ein Veranstalter weiss aus Erfahrung, dass 10 % der angemeldeten Personen eine Reise nicht antreten. Er bucht deshalb bei einer Fluggesellschaft 46 Plätze und verkauft an seine Kundschaft 50 Plätze. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheinen bei Antritt der Reise
 a) mehr als 46 Personen? b) höchstens 47 Personen?
- Aufg. 16) $\frac{3}{4}$ aller Schweizer Haushalte besitzen mindestens ein Auto; $\frac{1}{4}$ sogar zwei oder mehr. Ein Marktforschungsinstitut befragt 25 zufällig ausgewählte Haushalte. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 10 von diesen 25 Haushalten ...
 a) zwei oder mehr Autos besitzen? b) kein Auto besitzen?
 c) genau ein Auto besitzen? d) mindestens ein Auto besitzen?

- Aufg. 17) 15% aller Eier einer grossen Hühnerfarm enthalten (harmlose) Bluteinschlüsse. Vor dem Verpacken werden je 20 Eier gleichzeitig durchleuchtet, um jene T Eier aus-sortieren zu können, die Bluteinschlüsse aufweisen.
- Wie gross ist der häufigste Wert von T ?
 - In welchem Bereich liegen die 4 häufigsten Werte von T und wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für diesen Bereich?
- Aufg. 18) Fragen zur Formel $P(T = x) = \frac{n!}{x! \cdot (n-x)!} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$ (ohne Taschenrechner!)
- Zeigen Sie, dass $\text{bpdf}(5, \frac{1}{3}, 1) = \text{bpdf}(6, \frac{1}{3}, 2)$ gilt.
 - Bestimmen Sie p so, dass gilt: $\text{bpdf}(10, p, 4) = \text{bpdf}(10, p, 5)$
 - Ein Glücksrad mit Trefferwahrscheinlichkeit 20% wird 10-mal gedreht.
Berechnen Sie das Verhältnis $\frac{P(T = 5)}{P(N = 6)}$.
 - Ein Glücksrad mit Trefferwahrscheinlichkeit 25% wird zuerst 11-mal, dann 12-mal gedreht. Berechnen Sie das Verhältnis $\frac{\text{bpdf}(11, 0.25, 10)}{\text{bpdf}(12, 0.25, 10)}$.
- Aufg. 19) Laut einer Umfrage des Gallup-Institutes bei 800 US-AutofahrerInnen hielten sich 70% für überdurchschnittlich gute FahrerInnen. In der Grundgesamtheit aller Auto-fahrerInnen können logischerweise nur 50% besser sein als der Durchschnitt.
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Zufallsstichprobe von 800 AutofahrerInnen mindestens 70% überdurchschnittlich gut fahren?
 - Welche Folgerungen können aus diesem Umfrageergebnis gezogen werden?
- Aufg. 20) Ein Hotel weiss aus Erfahrung, dass jede sechste Zimmerreservation wieder abgesagt wird. Es nimmt daher 50 Bestellungen an, obwohl es nur 45 Betten hat.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit riskiert die Hotelleitung, Notbetten aufstellen zu müssen?
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden mindestens 35, aber höchstens 45 Reservationen eingelöst?
- Aufg. 21) Ein Flugzeug hat 144 Plätze. Die Fluggesellschaft weiss, dass durchschnittlich nur 96% der reservierten Plätze tatsächlich besetzt werden (96% „showups“).
- Wenn die Fluggesellschaft 150 Tickets verkaufen würde, wäre das Flugzeug im Mittel vollbesetzt ($0.96 \cdot 150 = 144$). Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheinen bei dieser massiven Überbuchung mehr als 144 Passagiere?
 - Die Fluggesellschaft verkauft pro Flug jeweils 146 Tickets zu je 250 Fr (statt genau 144 Tickets). Wenn mehr als 144 Passagiere erscheinen, fallen für die überzähligen Passagiere Mehrkosten von 1200 Fr pro Person an (Umbuchung, Abfindung, Hotelzimmer etc.).
Welche durchschnittlichen Mehreinnahmen pro Flug erzielt die Fluggesellschaft mit ihrer Überbuchungspraxis?

Lösungen

- 1) a) 0.346 (0.683 - 0.337) b) 0.683 (direkt ablesbar)
 c) 0.663 (1 - 0.337) d) 0.653 (0.990 - 0.337)
 e) 0.230 $P(N=2) = P(T=3)$
- 2) a) 0.1285 b) 0.0428 c) 0.9873 d) 0.0555
- 3) a) 0.1298 b) 0.0012 c) 0.1796
- 4) a) 0.8926 b) 0.9885 c) 0.9962
- 5) a) 0.122 b) 0.677
- 6) a) 0.164 b) 0.150
- 7) a) 0.3125 0.3125 0.1172 b) 0.0879 0.1318 0.2503
 c) 0.2684 0.3020 0.0264 d) 0.9888 0.8042 0.0207
 e) 0.0432 0.3704 0.8485 f) 0.2622 0.8363 0.0985
 g) 0.4602 0.4042 0.2761
- 8) a) 0.4% b) 8.6% c) 26.4% d) 45.6%
- 9) a) 39.2% b) 89.3% c) 75.5%
- Anmerkung zu 9c): Die Folgerung $P(\text{Treffer} > 10) = P(\text{Nieten} \leq 10)$ wäre richtig für reelle Zahlen. Für natürliche Trefferzahlen gilt jedoch: $P(\text{Treffer} > 10) = P(\text{Treffer} \geq 11) = P(\text{Nieten} \leq 9)$!
- 10) a) 0.2% b) 21.3% c) 7.7%
- 11) a) 24.3% b) 97.8%
- 12) a) 37.7% b) 17.6% c) 95.3%
- 13) a) 56% b) 6%
 c) Blosses Raten sollte keine Note über 1 ergeben. Wenn beispielsweise 15 richtige Antworten Note 1 geben (damit blosses Raten keine Chance hat), sollte der Test mindestens 15 einfache Aufgaben enthalten (damit seriöse KandidatInnen bis Note 1 keine Probleme haben).
- 14) a) 97.3% b) 1.7%
- 15) a) 25.0% b) 88.8%
- 16) a) 3% b) 3% c) 79% d) $\approx 100\%$ (0.9998)
- 17) a) $T = 3$
 b) $1 \leq T \leq 4$ mit $P(1 \leq T \leq 4) = 79.1\%$ } Tipp:
 Betrachten Sie die bpdf-Tabelle im Grafikrechner:
 $Y1 = \text{bpdf}(20, 0.15, x)$
- 18) a) ... b) $\frac{5}{11}$ c) $\frac{3}{10}$ d) $\frac{2}{9}$
- 19) a) 0.000 (schon bei $n=100$ gilt: $P(T \geq 70) = 0.000$)
 b) Äusserst unwahrscheinlich ist die Möglichkeit, dass der Zufall eine solche „Eliteauswahl“ produziert. Viel wahrscheinlicher ist die Annahme, dass ein systematischer Fehler vorliegt (z.B. aufgrund einer mehrheitlichen Selbstüberschätzung der Befragten).
- 20) a) 0.064 b) 0.930
- 21) a) 0.442 b) 475 Fr = $2 \cdot 250 - 1200 \cdot \text{binompdf}(146, 0.96, 145) - 2400 \cdot \text{binompdf}(146, 0.96, 146)$

3. Umkehraufgaben

I und n berechnen; p schätzen und testen

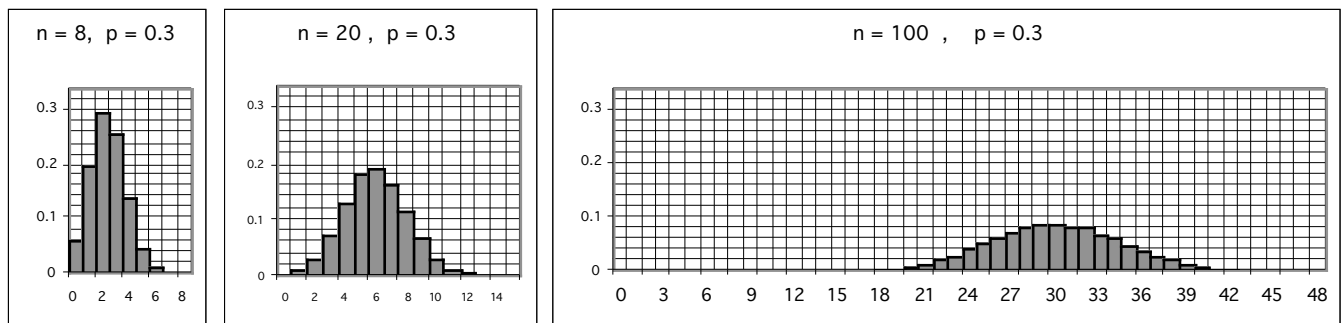
A) Einführung

Bei allen Binomialverteilungs-Aufgaben kommen vier Grössen vor:

- n: Anzahl Versuche (Anzahl Drehungen des Glücksrades)
- p: Trefferwahrscheinlichkeit bei einem Einzelversuch
- I: Intervall (Streubereich) von Trefferzahlen (Schreibweise: $x_L \leq T \leq x_R$)
- P(I): Wahrscheinlichkeit für das Erzielen einer Trefferzahl aus I

Bisher waren die ersten drei Grössen gegeben und P(I) war gesucht. Nun behandeln wir in diesem Kapitel die übrigen drei Fälle: n, p oder I gesucht.

Für diese drei Aufgabentypen ist es hilfreich, wenn Sie sich Binomialverteilungen als Ganzes (als Verteilungsdiagramme) vorstellen können!



Vergleicht man irgendwelche Verteilungsdiagramme für wachsendes n (und festes p), gilt stets:

Bei wachsendem n wandern die Verteilungsdiagramme nach rechts.
Ihre „Bergspitzen“ bleiben aber (relativ zu n) am gleichen Ort¹!
Die „Bergformen“ werden breiter und flacher und symmetrischer,
aber relativ zu n werden sie schmaler²!

Wenn man die horizontale Achse (von 0 bis n) stets auf die gleiche Länge staucht und die vertikale Achse entsprechend streckt, erkennt man, dass sich die „Bergformen“ für grosse n einer exakt symmetrischen Kurve annähern, der so genannten Normalverteilungskurve. Siehe auch Seite 21.

¹ Die „Bergspitze“ befindet sich stets an der Stelle „30% von n“.

² Die relative Breite des „sichtbaren Säulenberges“ beträgt im linken Diagramm $7/9 \approx 78\%$ der ganzen Trefferbreite von 0 bis 8, in der Mitte beträgt sie $12/21 \approx 57\%$ und rechts nur noch $21/101 \approx 21\%$.

B) Erwartungswert, Normbereiche, Standardabweichung

Bsp. I) Wie viele Sechsen erwarten Sie, wenn Sie einen idealen Würfel
a) 30 mal b) 15 mal werfen?

Bsp. II) Angeblich haben 80% aller EuropäerInnen einen rechtsdrehenden Haarwirbel am Hinterkopf. Wie viele SchülerInnen mit rechtsdrehenden/linksdrehenden Haarwirbeln erwarten Sie in Ihrer Klasse?

Erwartungswerte werden normalerweise mit einem griechischen μ (Mü) bezeichnet. (Die Lösung im Beispiel I) lautet: $\mu_a = 5$, $\mu_b = 2.5$).

Erwartungswerte sind *Durchschnittswerte* und sollten daher nicht mit den konkreten Ergebnissen eines Zufallsversuches verwechselt werden. (15-mal würfeln gibt *nie* 2.5 Sechsen!).

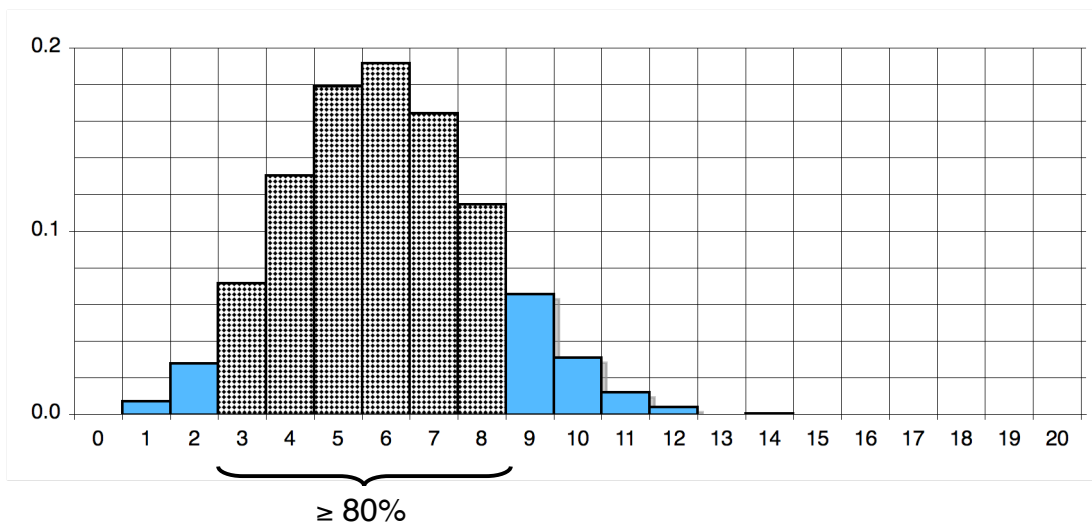
Bei sämtlichen Binomialverteilungen kann der **Erwartungswert** mit folgender Formel berechnet werden:

$$\mu = \frac{\text{Anzahl Einzelversuche} \cdot \text{Trefferwahrsch. im Einzelversuch}}{1}$$

Der Erwartungswert μ entspricht dem Schwerpunkt einer Verteilung. Trefferzahlen, die nahe beim Erwartungswert liegen, gelten als „normal“, Trefferzahlen, die weit entfernt von μ liegen, werden als „Ausreisser“ bezeichnet.

Der Erwartungswert μ befindet sich in der Säule mit der grössten Wahrscheinlichkeit oder unmittelbar daneben, d.h. der Erwartungswert markiert die „Spitze“ des Verteilungsdiagramms.

Bsp. III) Betrachten wir die grafische Veranschaulichung der Binomialverteilung für $n = 20$ und $p = 0.3$:



Intervalle mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit (z.B. $\geq 80\%$) gibt es viele. Sie sehen in der Grafik das Intervall $3 \leq T \leq 8$ mit der Wahrscheinlichkeit 85.1%. Auch das Intervall $4 \leq T \leq 9$ liefert eine Wahrscheinlichkeit über 80%, nämlich 84.5%. Beide Intervalle haben die Breite 6.

Es gibt übrigens kein Intervall der Breite 5 mit $P(I) \geq 80\%$, dafür drei Intervalle der Breite 7 etc.

Von allen Intervallen mit $P(I) \geq 80\%$ interessiert uns im Folgenden das Intervall der häufigsten (der „normalsten“) Trefferzahlen, der so genannte **80%-Normbereich**¹.

Grafische Methode zur Bestimmung von Normbereichen:

Schraffiert man in einem Verteilungsdiagramm die höchste und dann die nächst kleineren Säulen, bis eine Gesamtwahrscheinlichkeit von 80% erreicht bzw. erstmals übertroffen wird, dann erhält man den 80%-Normbereich. In unserem Beispiel ist es das Intervall $3 \leq T \leq 8$! Diese grafische Methode führt fast immer zu einer eindeutigen Lösung, weil normalerweise alle Säulen unterschiedlich hoch sind².

Rechnerische Methode:

Der $\alpha\%$ -Normbereich ist jenes Intervall minimaler Breite, das eine maximale Wahrscheinlichkeit (von mindestens $\alpha\%$) aufweist!

Sobald wir die kleinste Breite, den kleinsten „Durchmesser“ d kennen (in Bsp.III) ist $d=6$),

können wir mit $Y1 = \text{bcd}f(20, 0.3, x, x+d-1)$ [TI-89]

oder $Y1 = \text{bcd}f(20, 0.3, x+d-1) - \text{bcd}f(20, 0.3, x-1)$ [TI-84]

in der Tabelle (TABLE) das Intervall mit der grössten Wahrscheinlichkeit ($\geq 80\%$!) finden.

Es beginnt bei $x=3$ ($\rightarrow x_L$) und endet bei $x+5=8$ ($\rightarrow x_R$).

Die **Standardabweichung** σ (Sigma) ermöglicht es uns, die Breite von Normbereichen zu schätzen!

Bei Binomialverteilungen berechnet sich σ so:

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

Die „treppenförmige“ Binomialverteilung mit $\mu (= n \cdot p)$ und $\sigma (= \sqrt{n \cdot p \cdot q})$ ähnelt der „glatten“ Normalverteilungskurve mit gleichen μ und σ , nur ist die Normalverteilungskurve etwas schmaler und exakt symmetrisch zu μ . Diese Eigenschaften erleichtern jedoch die „Umkehrrechnung“ von der „kumulativen Verteilungsfunktion“³ f zum Funktionswert x .

Beispiel: Der 80%-Normbereich reicht von der $f(x)=10\%$ bis $f(x)=90\%$!

Der TI-Befehl `invNorm` liefert: `invNorm(0.1) \approx -1.28` und `invNorm(0.9) \approx 1.28`.

Für Normalverteilungen bedeutet dies:

Der 80%-Normbereich reicht von $x_L = \mu - 1.28 \cdot \sigma$ bis $x_R = \mu + 1.28 \cdot \sigma$.

$1.28 \cdot \sigma$ ist die halbe Breite (der Radius) dieses Normbereiches, und folglich auch ein (tendenziell zu kleiner) Schätzwert für den Radius des 80%-Normbereiches einer Binomialverteilung mit gleichem μ und σ .

Tabelle von Normbereichsradien:

Normbereich	50%	60%	70%	75%	80%	85%	90%	95%	99%
Radius ($=t \cdot \sigma$)	$0.67 \cdot \sigma$	$0.84 \cdot \sigma$	$1.04 \cdot \sigma$	$1.15 \cdot \sigma$	$1.28 \cdot \sigma$	$1.44 \cdot \sigma$	$1.64 \cdot \sigma$	$1.96 \cdot \sigma$	$2.58 \cdot \sigma$

¹ Der Begriff Normbereich wird vor allem in der Medizin und Biologie verwendet. In der Messtechnik verwendet man den Begriff Toleranzbereich. Beide Begriffe werden weniger im Zusammenhang mit der Anzahl Treffer (Zählgrösse) verwendet, sondern eher mit Messgrössen (z.B. „Normgewichte von Neugeborenen“ oder „Toleranzbereich von Kolbendurchmessern“).

² Ausnahme: Für $p=0.5$ ist die Binomialverteilung exakt symmetrisch und es kann der Fall eintreten, dass eine Normbereichsgrenze erreicht bzw. überschritten wird, wenn nur eine von zwei exakt gleich grossen Säulen schraffiert wird. In diesem Sonderfall ist es angebracht, das Verfahren so abzuändern, dass bei jedem Schritt jeweils **beide** (gleich grossen) Säulen schraffiert werden. (Bei einer symmetrischen Verteilung machen asymmetrische Normbereiche keinen Sinn).

³ f entspricht der „Höchstens-Wahrscheinlichkeit“: $f(x) = P(T \leq x)$

Vorgehen für die exakte Bestimmung von Normbereichen:

1. Intervalldurchmesser schätzen und runden (eher aufrunden!)	$\hat{d} = 2 \cdot r = 2 \cdot t \cdot \sigma$	(Tabelle S. 21!)
2. Intervallgrenzen schätzen und runden	$\hat{x}_L = \mu - r$	($\hat{x}_R = \mu + r$)
3. Exakte Grenzen mit Hilfe von binomcdf()–Tabellen suchen:		
Y1 = binomcdf(n,p,x + ($\hat{d} - 1$))	[TI–89]	
oder Y1 = binomcdf(n,p,x + ($\hat{d} - 1$)) – binomcdf(n,p,x – 1)	[TI–84]	
TBLSET mit TblStart = \hat{x}_L und $\Delta Tbl = 1$	→	TABLE: max. Y1 suchen → x_L (falls nötig: \hat{d} um 1 verkleinern bzw. vergrössern)
4. Exakten Normbereich als Intervall angeben:	$x_L \leq T \leq x_R$	

Aufgaben zu Erwartungswert und Normbereichen

- Aufg. 1) Berechnen Sie für eine Binomialverteilung mit $n=600$ und $p=0.6$ die folgenden 60%-Streubereiche:
- für die *häufigsten* Trefferzahlen (60%-Normbereich)
 - für die *kleinsten* Trefferzahlen (Intervall beginnt bei 0)
 - für die *grössten* Trefferzahlen (Intervall endet bei 600)
- Aufg. 2) Eine ideale Münze wird 125-mal geworfen; K sei die Anzahl der erzielten Köpfe, Z die Anzahl erzielter Zahlen.
- Berechnen Sie den 95%-Normbereich von K.
 - Berechnen Sie den 99%-Normbereich von Z.
- Aufg. 3) Sechs von zehn SchweizerInnen sind gegen einen EU-Beitritt.
- Wie viele EU-GegnerInnen sind in einer Zufallsauswahl von 30 Diskussions-teilnehmerInnen zu erwarten? (Punktschätzung!)
 - Wie viele EU-GegnerInnen sind in einer Zufallsauswahl von 30 Personen „normal“? (Intervallschätzung! Berechnen Sie den 95%-Normbereich.)
- Aufg. 4) Sie werfen einen idealen Würfel 360-mal.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielen Sie mehr als 66 Sechsen?
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielen Sie mindestens 6-mal so viele „Nicht-Sechsen“ wie Sechsen?
 - Berechnen Sie den 95%-Normbereich für die Anzahl geworfener Sechsen.
 - Berechnen Sie den 99%-Normbereich für die Anzahl der „Nicht-Sechsen“.
- Aufg. 5) In einem Experiment zu ausser sinnlicher Wahrnehmung wurden die Versuchspersonen in zwei Gruppen eingeteilt, die „Sender“ und die „Empfänger“. Den Sendern wurde ein Film vorgespielt, während die Empfänger (in einem andern Raum) aus vier Bildern jenes auswählen mussten, das dem gezeigten Film entsprach. Bei statischen Bildern (Dias) lag die Trefferquote der Empfänger bei 45 Treffern auf 164 Versuche, bei dynamischen Bildern (Videos) lag sie bei 77 Treffern auf 190 Versuche. Nehmen wir an, die Empfänger hätten bloss geraten ($p=1/4$).
- Wie gross ist der 90%-Normbereich bei 164 Versuchen?
 - Wie gross ist der 99%-Normbereich bei 190 Versuchen?
 - Wie interpretieren Sie diese Versuchsergebnisse?

Lösungen

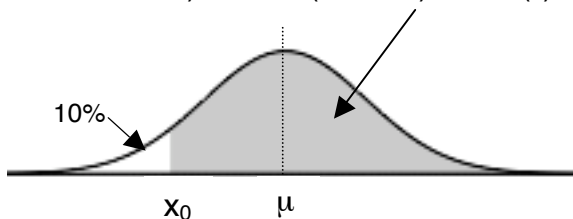
- 1) a) $350 \leq T \leq 370$ b) $0 \leq T \leq 363$ c) $357 \leq T \leq 600$
2) a) $52 \leq K \leq 73$ b) $48 \leq Z \leq 77$ (Spezialfall für $p=0.5$, siehe Fussnote Seite 20)
3) a) $x_0 = 18$ b) $13 \leq T \leq 23$
4) a) 0.178 b) 0.113 c) $47 \leq S \leq 74$ d) $282 \leq NS \leq 318$
5) a) $32 \leq T \leq 50$ b) $33 \leq T \leq 63$ c) auffällig hohe Trefferquote bei dynamischen Bildern!
(Nachfolgestudien nötig, um Zufall auszuschliessen)

C) Anzahl Versuche gesucht

Gegeben ist die Trefferwahrscheinlichkeit p und eine Trefferzahl x_0 . Wir betrachten die beiden Fragestellungen:

- (I) „Wie gross muss n (mindestens) sein, damit mindestens x_0 Treffer erzielt werden?“ und
(II) „Wie gross kann n (höchstens) sein, damit höchstens x_0 Treffer erzielt werden?“

- (I) Mindestanzahl von Versuchen, damit **mindestens x_0 Treffer** erzielt werden (mit $\geq 90\%$ Sicherheit), d.h. $P(x_0 \leq T \leq n) \geq 90\%$ (*).



Idee: x_0 kann als linke Grenze des **80%**-Normbereiches interpretiert werden!
($100\% - 90\% = 10\% \rightarrow 100\% - 2 \cdot 10\% = 80\%$)

Vorgehen für die exakte Bestimmung der Mindestanzahl von Versuchen:

1. n schätzen: $x_0 = \mu - t \cdot \sigma \rightarrow 0 = n \cdot p - t \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot q} - x_0$ (hier: $t=1.28$, siehe **S.21!**)

QUAD-Programm mit
 $a=p$; $b = -t \cdot \sqrt{p \cdot q}$; $c = -x_0$
liefert \sqrt{n} , sowie eine negative (ungültige) Lösung.

Quadrieren der positiven Lösung liefert Schätzwert \hat{n} für n

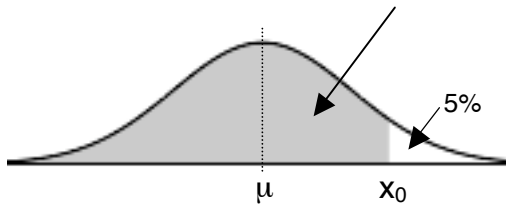
2. Exaktes n mit Hilfe von `binomcdf()`-Tabellen suchen:

$Y1 = \text{binomcdf}(x, p, x_0, x)$ [TI-89]

oder $Y1 = 1 - \text{binomcdf}(x, p, x_0 - 1)$ [TI-84]

TBLSET mit `TblStart`= $\hat{n} \rightarrow$ TABLE: kleinstes $x (=x_k)$ mit der Eigenschaft (*)
und $\Delta \text{Tbl} = 1$ suchen $\Rightarrow n \geq x_k$

(II) Höchstanzahl von Versuchen, damit **höchstens x_0 Treffer** erzielt werden (mit $\geq 95\%$ Sicherheit), d.h. $P(0 \leq T \leq x_0) \geq 95\%$ (**).



Idee: x_0 kann als rechte Grenze des **90%-** Normbereiches interpretiert werden!
 $(100\% - 95\% = 5\% \rightarrow 100\% - 2 \cdot 5\% = 90\%)$

Vorgehen für die exakte Bestimmung der Höchstanzahl von Versuchen:

1. n schätzen: $x_0 = \mu + t \cdot \sigma \rightarrow 0 = n \cdot p + t \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot q} - x_0$ (hier: $t = 1.64$, siehe **S.21!**)

QUAD-Programm mit
 $a = p$; $b = t \cdot \sqrt{p \cdot q}$; $c = -x_0$
 liefert \sqrt{n} , sowie eine negative (ungültige) Lösung.

Quadrieren der positiven Lösung liefert Schätzwert \hat{n} für n

2. Exaktes n mit Hilfe von binomcdf()-Tabellen suchen:

$Y1 = \text{binomcdf}(x, p, x_0)$ [TI-84 und 89]

TBLSET mit TblStart = $\hat{n} \rightarrow$ TABLE: grösstes $x (=x_g)$ mit der Eigenschaft (**) und $\Delta \text{Tbl} = 1$ suchen $\Rightarrow n \leq x_g$

Aufgaben zu Mindest- bzw. Höchstzahl von Versuchen

- Aufg. 1) Bei Telefonumfragen eines Meinungsforschungsinstitutes können erfahrungsgemäss 36% aller ausgewählten Personen nicht befragt werden. Ziel einer Umfrage wäre es, mindestens 1600 Personen zu befragen.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dieses Ziel erreicht, wenn 2500 Personen ausgewählt werden?
 - Wie viele Personen müssen ausgewählt werden, damit dieses Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit von $\geq 95\%$ erreicht wird?
 - Wie viele Personen dürfen höchstens ausgewählt werden, damit dieses Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit von $\geq 75\%$ verfehlt wird?
- Aufg. 2) Jemand benötigt 400 Luftballons für ein Kinderfest. Jeder Ballon zerplatzt beim Aufblasen mit der Wahrscheinlichkeit 0.1. Wie viele Ballons sollten gekauft werden, damit man mit 95%-iger Sicherheit mindestens 400 aufgeblasene Ballons hat?
- Aufg. 3) Bei einem Airbus A380 mit 840 Sitzplätzen werden durchschnittlich 10% aller Flugbuchungen nicht wahrgenommen.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleiben höchstens 10% aller Sitzplätze frei, wenn der Flug ursprünglich zu 100% ausgebucht war?
 - Mit welcher Belegung kann gerechnet werden, wenn der Flug ursprünglich um 10 Plätze überbucht war?
 - Wie viele Überbuchungen könnte die Fluggesellschaft annehmen, wenn sie in Kauf nimmt, dass in höchstens 1% der Flüge zu wenige Sitzplätze zur Verfügung stehen?

Lösungen

- | | | |
|-----------------|--------------------------|------------------|
| 1) a) 0.509 | b) $n \geq 2562$ | c) $n \leq 2474$ |
| 2) $n \geq 456$ | | |
| 3) a) 0.592 | b) $748 \leq T \leq 782$ | c) $n \leq 911$ |

D) Vertrauensintervall für p gesucht

Bei Normbereichen setze ich ein bestimmtes Glücksrad voraus und frage mich: Welche Trefferzahlen erzeugt dieses Glücksrad „normalerweise“?

Bei Vertrauensintervallen geht es um die entgegengesetzte Fragestellung:

Ich stelle in einem Experiment oder in einer Umfrage eine bestimmte Trefferzahl fest und frage mich: Welche Glücksräder erzeugen „normalerweise“ solche Trefferzahlen?

Gesucht wird also ein Intervall von Trefferwahrscheinlichkeiten (von p_{klein} bis p_{gross}), die zu jenen Glücksrädern gehören, deren 95%-Normbereiche die beobachtete Trefferzahl enthalten. (Die Festlegung auf 95% ist willkürlich, aber in der Praxis weit verbreitet.)

Stellen Sie sich sämtliche Binomialverteilungen mit festem n und variablem p als „Welle“ vor. Die „Welle“ dieser unendlich vielen Diagramme startet mit einer Säule ganz links ($p=0$), wird breiter und flacher, ist symmetrisch bei $p=0.5$ und endet mit einer Säule ganz rechts ($p=1$). Stellen Sie sich jetzt vor, die „Welle“ bestehe nur noch aus 95%-Normbereichen: Welche Normbereiche enthalten die beobachtete Trefferzahl?

Übrigens: In diesem Zeitlupenfilm ändern sich Position und Breite der Normbereiche ruckartig! Jener Normbereich, der die beobachtete Trefferzahl als erster „erfasst“, liefert p_k ; jener Normbereich, der die beobachtete Trefferzahl als letzter „verlässt“, liefert p_g .

Dieses Intervall $[p_k ; p_g]$ heisst **95%-Vertrauensintervall** für die unbekannte Trefferwahrscheinlichkeit p oder das **95%-Konfidenzintervall** für p.

Anmerkung

Dieser Definition liegt die unausgesprochene Annahme zugrunde, dass die beobachtete Trefferzahl ein (mindestens) „95%-normales“ Ergebnis darstellt! Diese Annahme muss natürlich nicht zutreffen.

Sollte die beobachtete Trefferzahl ausnahmsweise kein normales Ergebnis sein, so kann dies zwei Ursachen haben: Entweder hat uns der Zufall einen Streich gespielt, oder wir haben bei der Datenerhebung systematische Fehler gemacht.

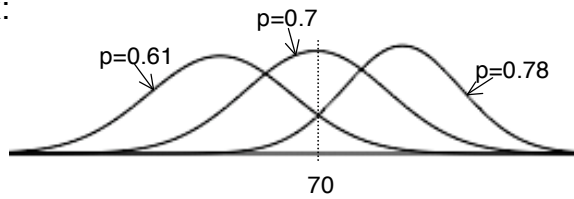
Systematische Fehler können wir verringern, wenn wir das Glücksrad fachgerecht drehen, d.h. unsere Daten nach allen Regeln der Kunst (d.h. nach der jeweiligen fachwissenschaftlichen Methodenlehre) sammeln.

Bleibt noch der Zufall. Der kann uns leider immer einen bösen Streich spielen. Aber wir können immerhin das „Vertrauen“ in die Richtigkeit unserer Rechnung selber festlegen. Es entspricht der Wahrscheinlichkeit der oben erwähnten Annahme: Bei 95%-Vertrauensintervallen beträgt dieses Vertrauen also (mindestens) 95%!

Fazit: Selbst dann, wenn wir die Daten fachgerecht sammeln, muss das wahre p nicht im 95%-Vertrauensintervall liegen. Aber in mindestens 95 von 100 Fällen liegt es drin!

Beispiel: Ein Spielautomat wird $n=100$ -mal betätigt. Dabei werden 70 Treffer erzielt.
 Welche Trefferwahrscheinlichkeiten (pro Spiel) sind mit diesem Resultat „verträglich“?
 \Rightarrow Gesucht ist ein 95%-Vertrauensintervall für die Trefferwahrscheinlichkeit p .

Grafik:



Ohne Rechnung: p könnte $70/100=0.7$ sein!
 Mit Rechnung: p könnte irgendeine Zahl zwischen 0.61 und 0.78 sein!

Bedingung: $x_0=70$ muss im 95%-Normbereich

Schätzung für p_{klein} :

Idee: $x_0=70$ als rechten Rand des 95%-Normbereiches von p_{klein} interpretieren!

$$\text{d.h. } n \cdot \hat{p}_k + 1.96 \cdot \sqrt{n \cdot \hat{p}_k \cdot (1 - \hat{p}_k)} \geq x_0 \quad (1)$$

Schätzung für p_{gross} :

Idee: $x_0=70$ als linken Rand des 95%-Normbereiches von p_{gross} interpretieren!

$$\text{d.h. } n \cdot \hat{p}_g - 1.96 \cdot \sqrt{n \cdot \hat{p}_g \cdot (1 - \hat{p}_g)} \leq x_0 \quad (2)$$

Wird in beiden Ungleichungen zuerst der Wurzelterm auf der rechten Seite isoliert:

$$(1) \ n \cdot \hat{p}_k - x_0 \geq -1.96 \cdot \sqrt{n \cdot \hat{p}_k \cdot (1 - \hat{p}_k)} \quad \text{bzw.} \quad (2) \ n \cdot \hat{p}_g - x_0 \leq 1.96 \cdot \sqrt{n \cdot \hat{p}_g \cdot (1 - \hat{p}_g)}$$

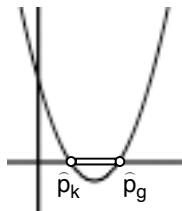
und werden dann beide Seiten quadriert, so erhält man in beiden Fällen dieselbe Ungleichung für die Unbekannte p ($=\hat{p}_k$ oder \hat{p}_g)! Sie lautet:

$$(n \cdot p - x_0)^2 \leq t^2 \cdot n \cdot p \cdot (1 - p)$$

ausmultipliziert:
$$n^2 \cdot p^2 - 2 \cdot n \cdot x_0 \cdot p + x_0^2 \leq t^2 \cdot n \cdot p - t^2 \cdot n \cdot p^2$$

nach 0 aufgelöst:
$$(n^2 + t^2 n) \cdot p^2 - (2n x_0 + t^2 n) \cdot p + x_0^2 \leq 0$$

quadratischer Funktionsterm:
 liefert eine nach oben geöffnete Parabel
 mit zwei positiven Nullstellen.



Die Lösungsmenge
 der quadratischen
 Ungleichung ist das
 Intervall:
 $\hat{p}_k \leq p \leq \hat{p}_g \quad !!$

n : Anzahl Versuche
 (im Bsp. $n=100$)
 x_0 : beobachtete Trefferzahl
 (im Bsp. $x_0=70$)
 t : aus Tabelle **S.21** ablesen
 (im Bsp. $t=1.96$)

p : unbekannte Treffer-
 wahrscheinlichkeit.

Vorgehen für die ungefähre Bestimmung des Vertrauensintervalles von p :

1. Ungleichung $(n^2 + t^2 n) \cdot p^2 - (2n x_0 + t^2 n) \cdot p + x_0^2 \leq 0$ (mit $t=1.96$ bei 95%-Vertrauensintervallen)

2. QUAD-Programm mit
 $a=n \cdot (n+t^2)$; $b=-n \cdot (2x_0 + t^2)$; $c=x_0^2$
 liefert \hat{p}_k und \hat{p}_g

3. $\hat{p}_k \leq p \leq \hat{p}_g$ ist eine Schätzung des Vertrauensintervalles für p !

Exakte Vertrauensintervalle könnten Sie so berechnen:

- Den exakten Normbereich des Schätzwertes \hat{p}_k berechnen, dann von $\hat{p}_k \pm 0.001$ usw., bis Sie p_k auf drei Nachkommastellen berechnet haben.
- Das Prozedere wiederholen für \hat{p}_g und $\hat{p}_g \pm 0.001$ usw.

Wir verzichten auf dieses sehr aufwändige Verfahren und begnügen uns (wie so oft in der Statistik) mit der Näherungslösung!

(Auch exakte 95%-Vertrauensintervalle enthalten das wahre p nur in 95 von 100 Fällen!)

Zurück zu unserem Beispiel mit 70 Treffern auf 100 Versuche:

Mit dem auf Seite 25 beschriebenen Verfahren erhalten wir als 95%-Vertrauensintervall

$$0.604 \leq p \leq 0.781 \quad (\text{Schätzung})$$

und nach aufwändiger Rechnung $0.601 \leq p \leq 0.785$ (exakt auf drei Dezimalstellen).

Lösungen der Aufgaben auf der nächsten Seite (Seite 28)

- 1) $0.444 \leq p \leq 0.506$ (auch für ideale Münzen liegt $K=475$ im 95%-Normbereich)
- 2) $16.5\% \leq p \leq 23.2\%$
- 3) $46.5\% \leq p \leq 51.3\%$
- 4) a) $[0.360 ; 0.426]$ b) $[117'000 ; 139'000]$
- 5) a) Nikotingruppe: $37.2\% \leq p \leq 54.7\%$ b) Keine Überlappung der Vertrauensintervalle:
Placebogruppe: $13.8\% \leq p \leq 28.0\%$ Die Nikotinpflaster sind (ziemlich sicher) wirksam!
- 5) a) ca. 1000 – 1430 b) ca. 430 – 750

Aufgaben zu Vertrauensintervallen (Näherungslösungen)

- Aufg. 1) Eine Münze wird 1000-mal geworfen, 475-mal erscheint „Kopf“.
Berechnen Sie das 95%-Vertrauensintervall für p_{Kopf} .
- Aufg. 2) Eine WHO-Studie stellte fest, dass bei $k=106$ von $n=539$ Männern im Alter zwischen 45 und 54 Jahren ein erhöhter Blutdruck vorlag.
Berechnen Sie das 95%-Vertrauensintervall für das Auftreten von Hypertonie bei Männern im Alter zwischen 45 und 54 Jahren (in der untersuchten Region).
- Aufg. 3) Bei einer repräsentativen Umfrage befürworteten 1397 von 2856 interviewten Personen die lebenslange Verwahrung von Sexualstraftätern. Geben Sie ein 99%-Vertrauensintervall an für den Anteil der BefürworterInnen in der Bevölkerung.
- Aufg. 4) In einer Stichprobe vom Umfang 827 fand man 325 Personen mit Blutgruppe 0.
a) Bestimmen Sie ein 95%-Konfidenzintervall für den Anteil p der Personen mit Blutgruppe 0.
b) Wie viele potenzielle, erwachsene BlutspenderInnen für diese Blutgruppe gibt es in einer Stadt, in der 325'000 Erwachsene leben? Beachten Sie: „Nullen“ vertragen nur Blut von „Nullern“, können aber allen andern Blutgruppen Blut spenden!
(Intervallschätzung mit Sicherheit $\geq 95\%$, gerundet auf 1000 Personen).
- Aufg. 5) Nikotinpflaster sollen RaucherInnen helfen, das Rauchen aufzugeben.
Bei einer amerikanischen Studie wurden 240 entwöhnungsbereite RaucherInnen, die sich freiwillig für ein Entwöhnungsexperiment zur Verfügung gestellt hatten, in zwei gleich grosse Gruppen eingeteilt (nach einem Zufallsverfahren).
120 RaucherInnen erhielten ein wirksames Nikotinpflaster, die andere ein „Placebopflaster“ (Placebo = Scheinmedikament). Nach acht Wochen hatten es 55 Personen mit Nikotinplastern geschafft, das Rauchen aufzugeben, bei der Placebogruppe schafften es 24 Personen.
(Die Studie war „doppelblind“, d.h. weder die RaucherInnen noch das medizinische Personal wussten, ob ein Pflaster den Wirkstoff enthielt oder nicht.)
a) Berechnen Sie die 95%-Vertrauensintervalle für die Wahrscheinlichkeit, dass eine entwöhnungsbereite Person nach acht Wochen das Rauchen aufgeben kann, und zwar sowohl für die „Nikotinpflastergruppe“ als auch für die Kontrollgruppe.
b) Ist die Rauchentwöhnungstherapie mit Hilfe von Nikotinplastern wirksam?
Argumentieren Sie.
- Aufg. 6) Um die Populationsgrösse von Wildtierbeständen herauszufinden, fängt man im betrachteten Gebiet Tiere dieser Art ein und markiert sie. Danach setzt man sie wieder aus. Nach einiger Zeit fängt man wieder Tiere derselben Art ein und stellt fest, wie viele davon markiert sind.
a) In einem Bezirk Finnlands werden 200 Rentiere gefangen und mit einem gut sichtbaren Farbfleck gekennzeichnet. Einige Wochen später fotografierte man vom Flugzeug aus verschiedene Rentierherden mit insgesamt 430 Tieren, von denen 72 eine Markierung trugen.
b) 120 Fische eines Fischteichs wurden gefangen, markiert und wieder frei gesetzt. Eine Woche später wurden 132 Fische gefangen; 28 Fische waren markiert.
Wie viele Tiere der betrachteten Art gibt es insgesamt in dem Bezirk bzw. im Fischteich? (Intervallschätzungen mit Sicherheit $\geq 90\%$, gerundet auf 10 Tiere).

E) Binomialtests (für p_0)

Bei Vertrauensintervallen geht es um die Frage: Für welche *möglichen* Glücksräder gehört die beobachtete Trefferzahl zum Bereich der „normalen“ Trefferzahlen?

Binomialtests beantworten die viel engere Fragestellung:

Gehört für ein *bestimmtes* Glücksrad (mit der Trefferwahrscheinlichkeit p_0) die beobachtete Trefferzahl zum Bereich der „normalen“ Trefferzahlen?

Binomialtests sind folglich ein Unterkapitel des Themas Vertrauensintervalle, aber ein Unterkapitel mit einer eigenen Terminologie und einer gewöhnungsbedürftigen Argumentationsweise. Im Vergleich zur sprachlichen Herausforderung ist der rechnerische Aufwand bescheiden.

Bsp. I)

Laut Volkszählung waren im Jahre 2000 15.4% der Wohnbevölkerung des Kantons Basel-Landschaft mehr als 65 Jahre alt. Gilt dieser Anteil auch heute noch?

Zur Überprüfung der Vermutung, dieser Anteil habe sich inzwischen verändert, erheben Sie eine Zufallsstichprobe. Nehmen wir einmal an, von 160 zufällig ausgewählten EinwohnerInnen aus Basel-Land gaben 34 an, älter als 65 Jahre zu sein.

Kann aus diesem Stichprobenergebnis tatsächlich auf einen veränderten Anteil älterer Menschen in der gesamten Wohnbevölkerung geschlossen werden?

Wir müssen eine Entscheidung treffen zwischen der so genannten **Nullhypothese** $p = p_0$ (das Glücksrad mit $p_0 = 15.4\%$ *könnte* das beobachtete Ergebnis von 34 Treffern auf 160 Versuche plausibel erklären) und der **Alternativhypothese** $p \neq p_0$ (nein, dieses Glücksrad war es wohl nicht).

Bei jedem statistischen Test gibt man sich zuerst eine **Irrtumswahrscheinlichkeit** α vor. α wird auch Signifikanzniveau genannt oder Fehler 1. Art.

Wenn man sich beispielsweise eine Irrtumswahrscheinlichkeit von (höchstens) 5% vorgibt, dann bedeutet dies, dass man eine Nullhypothese in (höchstens) 5% aller Fälle zu Unrecht ablehnen möchte.

Beachten Sie bitte die wichtige Tatsache, dass es bei Binomialtests stets um die *Ablehnung* der Nullhypothese geht. Eine Annahme der Nullhypothese, also die Richtigkeit einer einzelnen Trefferwahrscheinlichkeit p_0 festzustellen, ist unmöglich, weil die beobachtete Trefferzahl stets durch eine Vielzahl von Trefferwahrscheinlichkeiten plausibel erklärt werden kann, nämlich durch alle p aus dem Vertrauensintervall $[p_k; p_g]$!

Das heisst, dass der **Fehler 2. Art**, ein falsches Modell irrtümlich beizubehalten, normalerweise nicht berechenbar ist.

Hingegen kann der **Fehler 1. Art**, ein richtiges Modell irrtümlich abzulehnen, genau angegeben werden; er beträgt gemäss unseres Entscheidungsverfahrens (höchstens) 5%!

Die Fehler 1. und 2. Art sind in gewisser Weise voneinander abhängig¹.

¹ Will man vermeiden, einen Unschuldigen irrtümlich schuldig zu sprechen (Fehler 1. Art), dann muss man hohe Anforderungen an die Beweiskraft der Indizien stellen. Damit wächst jedoch zwangsläufig das Risiko, dass tatsächliche Verbrecher nicht überführt werden können (Fehler 2. Art).

Möchte man dagegen erreichen, dass kein einziger Verbrecher frei herumlaufen kann, müssen die Ansprüche an die Beweiskraft der Indizien erheblich reduziert werden. Damit ist aber unvermeidbar verbunden, dass auch Unschuldige eingesperrt werden.

Offensichtlich kann man nicht beide Risiken gleichzeitig verringern.

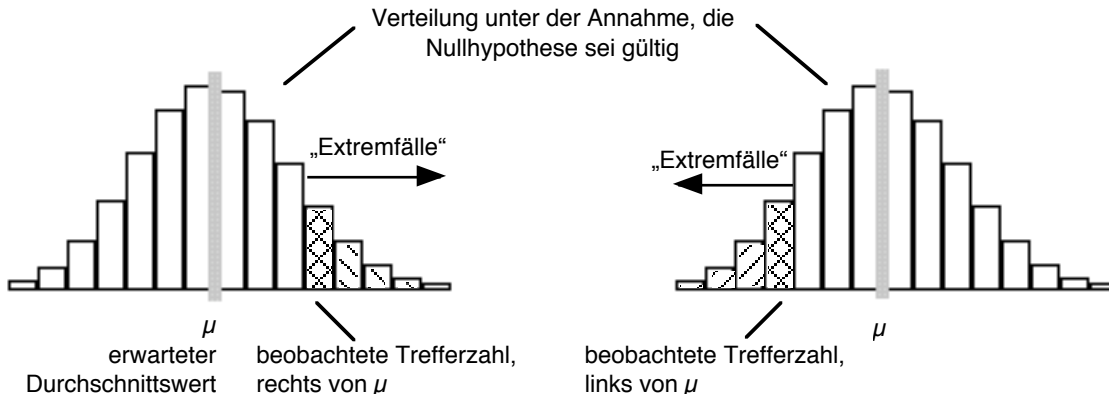
- Betrachten wir zuerst **zweiseitige** Binomialtests!

Hier wird die Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%$ zu gleichen Teilen auf die beiden Ränder der Trefferskala verteilt. Zwischen diesen extrem kleinen und extrem grossen Trefferzahlen liegt der (ungefähr symmetrische) 95%-Normbereich der häufigsten Trefferzahlen.

Bei zweiseitigen Tests (und $\alpha=5\%$) können Sie ein bestimmtes Glücksrad mit der Trefferwahrscheinlichkeit p_0 mit folgenden Argumenten *ablehnen* :

- 1) Die beobachtete Trefferzahl liegt ausserhalb des 95%-Normbereiches des Glücksrads.
- 2) p_0 liegt nicht im 95%-Vertrauensintervall für den beobachteten Trefferanteil p .
- 3) Die (unten schraffierte) „Randwahrscheinlichkeit“ (engl. „p-value“) ist kleiner als 2.5%.

Die Randwahrscheinlichkeit setzt sich aus den schraffierten Wahrscheinlichkeiten zusammen:



In Bsp. I liegt die beobachtete Trefferzahl 34 rechts von $\mu = 0.154 \cdot 160 \approx 24.6$, also beträgt die Randwahrscheinlichkeit $P(T \geq 34) = 1 - \text{bcdf}(160, 0.154, 33) \approx 3.0\%$. Diese Randwahrscheinlichkeit ist grösser als $\alpha/2 = 2.5\%$, also kann die Behauptung, der 15.4%-Anteil älterer Leute gelte immer noch, *nicht* abgelehnt werden, jedenfalls nicht auf diesem Signifikanzniveau.

Je grösser die Irrtumswahrscheinlichkeit gewählt wird, desto leichter kommen wir zu einer Ablehnung der Nullhypothese. Allerdings wächst dann die Gefahr, dass uns der Zufall irreführt und wir die Nullhypothese fälschlicherweise ablehnen (Fehler 1.Art).

Die Randwahrscheinlichkeitsmethode ist rechnerisch wesentlich einfacher als die beiden andern Argumentationsweisen (allerdings sind sowohl Normbereiche als auch Vertrauensintervalle informativer und anschaulicher als Randwahrscheinlichkeiten).

- Vorgehen bei **rechtsseitigen** Binomialtests:

In gewissen Fällen (s. Seite 27) kann die Irrtumswahrscheinlichkeit als Ganzes auf den *rechten* Rand der Trefferskala gelegt werden. Links davon liegt nun der 95%-Streubereich der *kleinsten* Trefferzahlen.

Bei rechtsseitigen Tests (und $\alpha=5\%$) können Sie ein bestimmtes Glücksrad mit der Trefferwahrscheinlichkeit p_0 mit folgenden Argumenten *ablehnen*:

- 1) Die beobachtete Trefferzahl liegt ausserhalb des 95%-Streubereiches der kleinsten Trefferzahlen.
- 2) p_0 liegt nicht im 90%-Vertrauensintervall für den beobachteten Trefferanteil p .
- 3) Die (rechte) „Randwahrscheinlichkeit“ ist kleiner als 5%.

Für **linksseitige** Tests gelten analoge Argumente.

Wann sind einseitige Tests gerechtfertigt?

Eine Lieferung von Massengütern wird nur dann zurückgewiesen, wenn in der Stichprobe wesentlich mehr Ausschuss auftritt als erwartet. Bei zu wenig Ausschuss wird ein Kunde niemals reklamieren.

Einseitige Tests sind dann gerechtfertigt, wenn nur einer der beiden Randbereiche der Trefferskala als extrem betrachtet wird.

Auch Vorkenntnisse können ein Grund sein, einen Binomialtest nur einseitig durchzuführen.

Nehmen wir an, wir wüssten aus zuverlässigen Quellen, dass der Anteil der älteren Menschen in Basel-Land in den letzten acht Jahren unmöglich kleiner geworden ist. Dann ist in Bsp. I ein einseitiger (hier ein rechtsseitiger) Binomialtest gerechtfertigt.

Weil die Randwahrscheinlichkeit $P(T \geq 34) = 3.0\%$ kleiner ist als 5%, können wir bei einem einseitigen Test (den wir nur dank unseres Vorwissens einseitig durchführen dürfen) die Behauptung *ablehnen*, der 15.4%-Anteil älterer Leute gelte immer noch.

Um nachträglichen Manipulationen vorzubeugen, sollte immer *vor* der Datenerhebung entschieden werden, ob der Test zweiseitig oder einseitig erfolgen soll! Auch das Signifikanzniveau (die Irrtumswahrscheinlichkeit) muss *vorher* festgelegt werden!

Im Prinzip sollte jede Widerlegung einer Hypothese auf Daten beruhen, die eigens für diesen Zweck gesammelt wurden.

Wenn Datenberge nach *irgendwelchen* Auffälligkeiten durchpflügt werden („data-mining“) und die dabei entdeckten Auffälligkeiten mit den gleichen Daten als Auffälligkeiten „bewiesen“ werden, handelt es sich meistens um Fehlschlüsse. Es gehört nämlich zur Natur des Zufalls, *irgendwelche* Auffälligkeiten zu produzieren um damit sorglose Wissenschaftler in die Irre zu führen...

Bsp. II)

Eine Krankheit wird mit den bisher bekannten Medikamenten mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% geheilt. Von einem neuen Medikament wird nach erfolgreichen Vortests behauptet, dass es höhere Heilungsquoten habe.

Anhand eines Tests¹ an 80 freiwilligen Patienten will die Gesundheitsbehörde über die Markteinführung entscheiden.

Entscheidungskriterium der Gesundheitsbehörde: Das neue Medikament muss mehr Heilungen erzielen als dies die alten Therapien „normalerweise“ tun.

- Bei Medikamententests wird üblicherweise mit 95%-Streubereichen gerechnet.
- Nehmen wir an, die Gesundheitsbehörde akzeptiere die Vortestresultate des Medikamentenherstellers und führe einen rechtsseitigen Binomialtest durch mit $\alpha = 5\%$.
- Bei einem rechtseitigen Binomialtests berechnen wir den 95%-Streubereich für *kleine* Trefferzahlen. Dieser beträgt bei $n = 80$ und $p_0 = 0.6$: $0 \leq X \leq 55$
- Jetzt müssen nur noch die medizinischen Ergebnisse abgewartet werden. Bei mindestens 56 geheilten Patienten wird die Behörde das neue Medikament akzeptieren, andernfalls wird die Marktzulassung verweigert.

¹ Beachten Sie bitte die unterschiedlichen Bedeutungen des Begriffes „Test“.

Bei Medikamententests geht es um reale Experimente, bei statistischen Tests um ein Gedankenexperiment. (Nämlich: Ist die Nullhypothese ein plausibles Modell für die im realen Experiment beobachteten Daten?)

Aufgaben zu Binomialtests

⇒ Verwenden Sie für alle Aufgaben das „Randwahrscheinlichkeitsargument“.

- Aufg. 1) Ein Fabrikationsverfahren darf höchstens 5% Ausschuss produzieren. Diese Ausschussrate wird regelmässig durch Zufallsstichproben vom Umfang $n = 25$ überprüft. Bei einer Stichprobe waren 4 der 25 getesteten Produkte fehlerhaft. Muss ein Eingriff in den Fabrikationsprozess erfolgen? (Testen Sie einseitig mit Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%$.)
- Aufg. 2) Ein computergesteuertes Börsensystem sagte für 50 Aktien voraus, ob deren Kurse Ende Monat höher oder tiefer liegen würden als heute. Ergebnis: In 30 von 50 Fällen traf die Prognose zu. Ist das Börsensystem treffsicherer als ein „Münzwurfmodell“? (Testen Sie zweiseitig mit $\alpha = 5\%$.)
- Aufg. 3) Verschiedene medizinische Studien weisen auf einen Zusammenhang zwischen Blutgruppe A und erhöhtem Auftreten von Magenkrebs hin. 40% einer Bevölkerung hat Blutgruppe A. Stichprobenergebnis: Von 100 zufällig ausgewählten PatientInnen mit Magenkarzinomen besaßen 49 Blutgruppe A.
- Besteht ein Zusammenhang zwischen Blutgruppe A und dem Auftreten von Magenkarzinomen? (Testen Sie einseitig mit $\alpha = 5\%$.)
 - Warum ist ein einseitiger Test gerechtfertigt?
- Aufg. 4) Wir würfeln mit dem Zufallsgenerator eines Computers und zählen das Auftreten der Augenzahl 6. Bei 1485 Würfungen trat sie 234-mal auf. Ist der Zufallszahlengenerator brauchbar?
- Aufg. 5) Ein Vogelkundler fängt 20 Papageien und stellt fest, dass er lediglich 4 Weibchen gefangen hatte. Berechnen Sie die zugehörige Randwahrscheinlichkeit und nennen Sie mögliche Gründe für das „extreme“ Stichprobenergebnis!
- Aufg. 6): Ein Marktfahrer behauptet, dass 25% aller Lose aus seiner Lostrommel Gewinne seien.
- Jemand beobachtete, dass unter 50 verkauften Losen nur 8 Gewinnlose auftraten. Hat der Losverkäufer die Wahrheit gesagt?
 - Welches Urteil würden Sie fällen, wenn unter 100 verkauften Losen 16 Gewinnlose beobachtet worden wären?
- Aufg. 7) Ein Biologiestudent macht Fütterungsexperimente mit Polarfüchsen. Er offeriert den Füchsen je einen Lemming und eine Wühlmaus zur Auswahl. Im Verlaufe von insgesamt 50 Fütterungen entschieden sich die Füchse 28-mal für den Lemming und 22-mal für die Wühlmaus. Kann aufgrund dieser Zahlen von einer signifikanten Bevorzugung der Lemmingnahrung durch die Polarfüchse gesprochen werden? ($\alpha = 5\%$, einseitiger oder zweiseitiger Test?)
Signifikantes Ergebnis: Das Stichprobenergebnis liegt nicht im 95%-Normbereich!
- Aufg. 8) Im Jahre 2006 wurden im Kanton Basel-Landschaft 1123 Knaben und 1121 Mädchen geboren. Gesamtschweizerisch betrug der Anteil der Knabengeburten 51.5%.
- Der Anteil der BL-Knabengeburten lag 2006 deutlich unter dem gesamtschweizerischen Durchschnitt. Kann sogar von einer signifikanten Abweichung nach unten gesprochen werden? ($\alpha = 5\%$, einseitiger oder zweiseitiger Test?)
 - Jemand untersucht den Anteil der Knabengeburten des Jahres 2006 in allen 24 Kantonen. Wie viele signifikante Abweichungen vom gesamtschweizerischen Durchschnitt würden Sie erwarten?
- Aufg. 9) Am 16. Mai 1994 fragte Newsweek 518 erwachsene AmerikanerInnen:
„From everything you know about Bill Clinton, does he have the honesty and integrity you expect in a president?“ 233 von 518 (knapp 45% aller Befragten) antworteten „yes“. Konnten Clintons GegnerInnen daraus ableiten, dass die Mehrheit der AmerikanerInnen nicht mehr an die Ehrlichkeit des damaligen Präsidenten glaubte, der durch einen Sexskandal in Verruf geratenen war? ($\alpha = 5\%$, einseitiger oder zweiseitiger Test?)

Lösungen

- 1) $n=25$, $p_0=0.05$, $X=4$ ist rechts von $\mu=1.25$, Test einseitig:
Die Randwahrscheinlichkeit $P(T \geq 4) = 0.034$ ist kleiner als 5%; ein Eingriff in den Produktionsprozess ist gerechtfertigt.
- 2) $n=50$, $p_0=0.5$ (Münzwurf), $X=30$ ist rechts von $\mu=25$, Test zweiseitig:
 $P(T \geq 30) = 0.10$ ist grösser als 2.5%; also kann nicht behauptet werden, das Börsensystem sei signifikant besser als ein „Münzwurfmodell“.
- 3) a) $n=100$, $p_0=0.4$ (Annahme, der Anteil der Blutgruppe A bei den Magenkrebs-PatientInnen sei gleich gross wie in der Gesamtbevölkerung), $X=49$ ist rechts von $\mu=40$, Test einseitig:
 $P(T \geq 49) = 0.0423 < 5\%$; also tritt Blutgruppe A bei diesen PatientInnen ungewöhnlich häufig auf.
b) Der in Fachkreisen bekannte Zusammenhang rechtfertigt einen einseitigen Test.
- 4) $n=1485$, $p_0=1/6$, $X=234$ ist links von $\mu=247.5$, Test zweiseitig mit $\alpha = 5\%$:
 $P(T \leq 234) = 0.183 > 2.5\%$; die Daten sprechen nicht gegen die Brauchbarkeit des Programms; ob es aber in jeder Hinsicht brauchbar ist, können wir nicht beurteilen!
- 5) $n=20$, (50% Weibchen), $X=4$ ist links von $\mu=10$:
 $P(T \leq 4) = 0.006$. Mögliche Gründe für diesen sehr kleinen p-value: Keine geschlechtsneutrale Fangmethode; Weibchen sind gerade am Brüten; $p_0=50\%$ trifft nicht zu; Zufall hat Streich gespielt etc.
- 6) a) $n=50$, $p_0=0.25$, $X=8$ ist links von $\mu=12.5$, Test zweiseitig (solange keine einschlägigen Erfahrungen vorliegen!) mit $\alpha = 5\%$:
 $P(T \leq 8) = 0.092 > 2.5\%$; also darf die Aussage des Losverkäufers nicht abgelehnt werden. Ob er die Wahrheit sagt, können wir jedoch nicht beurteilen ($p_0=0.1$ wäre z.B. auch möglich).
b) $n=100$, $p_0=0.25$, $X=16$ ist links von $\mu=25$, Test zweiseitig (die einschlägigen Erfahrungen fehlen immer noch) mit $\alpha = 5\%$:
 $P(T \leq 16) = 0.021 < 2.5\%$; also wird die Aussage des Losverkäufers jetzt abgelehnt.
Abgesehen vom Zufallsfehler $\alpha = 5\%$ (Fehler 1. Art) gibt es noch andere Möglichkeiten, die Aussage des Losverkäufers zu Unrecht abzulehnen:
Die Lostrommel könnte zum Beispiel schlecht durchmischt sein oder die beobachteten Lose könnten von eher glücklosen (unzufriedenen) LoskäuferInnen stammen; beide Male hätten wir keine Zufallsstichproben.
Überdies könnten wir bei dieser Aufgabe mit dem Urnenmodell (Ziehen ohne Zurücklegen) etwas genauer rechnen als mit dem Glücksradmodell, allerdings müssten wir dann die Anzahl Lose in der Lostrommel kennen.
- 7) $n=50$, $p_0=0.5$ (keine Bevorzugung einer Futterart), $X=28$ (Lemminge) ist rechts von $\mu=25$, Test zweiseitig (kein Vorwissen) mit $\alpha = 5\%$:
 $P(T \geq 28)$ oder $P(N \leq 22) = 0.24 > 2.5\%$. Zur Enttäuschung des Studenten, der gerne einen „signifikanten Unterschied“ nachgewiesen hätte, muss die Nullhypothese $p_0=0.5$ vorläufig beibehalten werden.
- 8) a) $n=2244$, $p_0=0.515$, $X=1123$ ist links von $\mu=1155.66$, Test zweiseitig (Testverfahren sollten immer vor dem realen „Experiment“ festgelegt werden, nicht nachträglich aufgrund gesichteter Daten, hier also vor dem Jahre 2006!) mit $\alpha = 5\%$:
 $P(T \leq 1123) = 0.087 > 2.5\%$; keine signifikante Abweichung vom gesamtschweizerischen Durchschnitt.
b) Bei 24 Stichproben mit der Irrtumswahrscheinlichkeit 5% beträgt der Erwartungswert für „extreme“ Stichproben: $24 \cdot 5\% = 1.2$ Stichproben! Bei 24 Stichproben ist *irgendeine* extreme Abweichung also keineswegs erstaunlich, sondern im Gegenteil „normal“, selbst dann, wenn in keinem Kanton der wahre Anteil signifikant von $p_0=0.515$ abweichen würde.
Dieser irritierende Aspekt des Zufalls ist ein echtes Problem in der wissenschaftlichen Forschung. Wenn viele Forscher und Forscherinnen dieselbe Frage bearbeiten, dann ist die Chance gross, dass *irgendjemand* eine vermeintliche „wissenschaftliche Sensation“ findet, während die andern nichts Auffälliges entdecken konnten.
- 9) $n=518$, $p_0=0.5$ (eigentlich $p_0 \geq 0.5$ für Clinton-Fans), $X=233$ ist links von $\mu=259$, Test zweiseitig (oder einseitig, wenn bereits einschlägige Meinungsumfragen gemacht wurden) mit $\alpha = 5\%$:
 $P(T \leq 233) = 0.012 < 2.5\%$. Sogar bei einem zweiseitigen Test kann behauptet werden, dass am 16.5.1994 die Clinton-Fangemeinde keine 50% der Amerikaner und Amerikanerinnen umfasste.
Allerdings heisst das noch nicht, dass die Clinton-Gegner in der Mehrheit waren (es gab z.B. auch Unentschiedene)! Ausserdem gilt: Meinungen sind beeinflussbar, z.B. durch suggestive Umfrage-Fragen (wie diese Newsweek-Frage)!